LA TASA INTERNA DE RETORNO PROMEDIO COMO MEDIDA ALTERNATIVA DE RENDIMIENTO

Gastón S. Milanesi [1]

Resumen

La tasa interna de retorno es una medida ampliamente difundida, pero presenta un conjunto de debilidades por su estructura matemática. Desde el punto de vista financiero, es la tasa de máximo rendimiento y, por ende, aquella que iguala flujos de fondos de diferentes signos. Su lógica presenta un fuerte defecto por no discriminar entre el capital empleado para obtener el rendimiento y los beneficios derivados de la inversión. Este hecho hace que la TIR presente serias inconsistencias que generan información ambigua. El trabajo propone a la Tasa Interna de Retorno Promedio (TIRP) como medida alternativa. Para su construcción toma el concepto de Media de Chisini, considerando de manera separada, capitales y flujos de la inversión. Esto asegura la consistencia de sus resultados con el criterio del Valor Presente y la resolución de debilidades de la TIR. La estructura del presente trabajo es la siguiente: primero se desarrolla el concepto de TIRP partiendo de la Media de Chisini. Luego, son expuestas las principales limitaciones de la TIR y las soluciones propuestas por la TIRP. Seguidamente, mediante casos, son ilustrados los conflictos de la TIR y las resoluciones brindadas por TIRP: tasas múltiples, proyectos excluyentes con diferentes escalas, vidas desiguales, costos variables de capital, inflación, rendimientos estocásticos y esperados, y aditividad del valor. Finalmente, son expuestas las principales conclusiones.

Palabras claves: rendimientos, capitales, flujos, TIR, TIRP.

[1] **Datos del autor:**

GASTÓN S. MILANESI. Doctor en Ciencias de la Administración, Profesor Titular del Departamento de Ciencias de la Administración, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. Correo electrónico: milanesi@uns.edu.ar

1. Introducción

La tasa interna de retorno, conocida por sus siglas como TIR y de ahora en más notada como (*r*), es una medida de generación relativa de riqueza, ya que devuelve un incremental expresado en términos de tasa, a partir del retorno promedio generado por todos los flujos de fondos del proyecto. En los primeros trabajos, la tasa de rendimiento fue cobrando popularidad bajo el ropaje matemático de un polinomio de grado *n* según el horizonte del proyecto (Fisher, 1930), (Boulding, 1935), (Keynes, 1936). Toda inversión requiere recursos, denominados flujos de capitales, sobre los cuales se esperan una serie de resultados expresados bajo la forma de flujos de fondos. El álgebra que plantea la TIR confunde las dos medidas, capital y flujos de fondos del proyecto. Esto, lejos de ser algo trivial, pasa a ser el nudo gordiano de todas las debilidades que *r* presenta y fruto de importantes debates en la literatura especializada. A modo de ejemplo, una interpretación frecuente del resultado que arroja la TIR sobre una inversión sería: una $r = 5$ % representa 0,05 céntimos por unidad monetaria invertida, pero, matemáticamente, el 5 % surge de considerar en su cálculo al conjunto de flujos, tanto beneficios como capitales invertidos. El guarismo obtenido representa la raíz del polinomio de grado *n*, si se lo interpreta desde una perspectiva ajustada estrictamente a las matemáticas. Desde el punto de vista financiero, es la tasa de máximo rendimiento y, por ende, aquella que iguala flujos de fondos de signo negativo y positivo, al no discriminar entre capital empleado para obtener el rendimiento y beneficios derivados de la inversión. Por lo tanto, el hecho de no segregar capitales y flujos dispara una batería de debilidades e inconvenientes para la TIR.

En efecto, la tasa de rendimiento de una inversión (o costo efectivo, en el caso de un préstamo) es función del capital involucrado, debido a que para un vector fijo de flujos de fondos *(x)* se corresponde una corriente de capital *(c)* compatible con tal vector. La aseveración precedente indica que existen infinitas tasas de rendimientos asociadas con el proyecto, que dependen del vector flujos y de la serie de capitales involucrados. Un error cotidiano surge de pensar la existencia de una relación biunívoca entre el vector de flujos de fondos y la tasa de retorno. Esto es así puesto que una tasa de rendimiento, de manera explícita o implícita, se encuentra inexorablemente asociada a una corriente de capital. Por ello, una medida de rendimiento debe concentrarse en describir la capacidad de generar valor que poseen los capitales comprometidos (inversión), pero expresado en términos relativos.

En ese orden de ideas, el rendimiento (costo) de una inversión (préstamo) representa el ratio generado entre el vector ingreso agregado (flujos de fondos) y el capital agregado (inversión). La TIR apareja más desaciertos que aciertos. Sus diversas limitaciones están dadas, entre otras, por la existencia de múltiples TIR en proyectos no convencionales; la inconsistencia entre el ordenamiento que arroja el Valor Actual (VP) y r, en el caso de proyectos mutuamente excluyentes; la no cuantificación del rendimiento efectivo sobre la inversión inicial; la inaplicabilidad de la regla de decisión de r, en casos de costos variables de capital (k); la inconsistencia entre TIR nominales y reales y la inconsistencia entre TIR estocástica y esperada.

Frente a los múltiples inconvenientes de la TIR, emerge una medida alternativa denominada tasa promedio de rendimiento (TIRP) (*Average Internal Rate of Return*), de aquí en más notada como r_a (Hazen, 2003), (Magni, 2010), (Magni, 2013), (Milanesi, 2016). En el presente trabajo será desarrollada formalmente la medida, abordando cada una de las limitaciones que presenta la TIR y la solución propuesta por la TIRP. Consecuentemente, la estructura es la siguiente: primero se desarrolla matemáticamente el concepto de TIRP a partir de la Media de Chisini, luego se presentan las limitaciones de la TIR y soluciones propuestas por la TIRP: proyectos mutuamente excluyentes de diferentes escalas, tasas variables y costo de capital, inflación y tasas de rendimiento, efectos contexto o referencia y los rendimientos estocásticos y esperados. Los ítems indicados son ilustrados con un caso de aplicación para facilitar su comprensión. Finalmente, se presentan las principales conclusiones.

2. Una medida de rendimiento alternativa. La TIRP (r_a) y su desarrollo formal

En la presente sección será planteada y explicada matemáticamente la TIRP, siguiendo a Magni, 2013 y a Milanesi, 2016.

2.1. La TIRP: su desarrollo a partir del concepto de Media de Chisini

La sucesión de capitales aplicados a una inversión a lo largo del tiempo se nota como $c_t = (c_0, c_1, c_2 \dots c_{T-1})$, mientras que $x_t = (x_0, x_1, x_2 \dots x_T)$ representa la corriente de beneficios futuros asociados a los recursos comprometidos en la inversión. Por consiguiente, el resultado de una inversión en el instante t puede expresarse de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{R_t = c_t - c_{t-1} + x_t} \quad (1)$$

Donde el término c_{t-1} representa el capital invertido (prestado) en el periodo $[t-1]$, c_t es el capital en el periodo $[t]$ y x_t es el flujo de fondos (beneficio) generado por el capital en el respectivo periodo. Por lo tanto R_t representa el resultado del periodo[1], sujeto a las siguientes condiciones (Magni, 2010):

a) El capital correspondiente al periodo *t* surge del producto entre el capital del periodo anterior y su tasa de rendimiento (r_t) menos el flujo o beneficio total generado por la inversión (x_t) según la siguiente expresión:

$$c_t = c_{t-1}(1 + r_t) - x_t (2)$$

b) Se supone que el valor inicial de la corriente de capital (c_0) representa la inversión inicial de la corriente de flujos de fondos:

$$c_0 = -x_0 (3)$$

c) El valor del capital invertido al final de la vida de la inversión es $c_T = 0$. En el horizonte final (T) no se proyecta crecimiento como consecuencia de reinvertir; se presupone que la inversión se recupera íntegramente y que su valor será x_T. Por lo tanto;

$$c_T = c_{T-1}(1 + r_T) + x_T = 0 \ (4)$$

d) La tasa de rendimiento periódica correspondiente a la inversión bajo estudio surge del cociente entre el resultado (R_t) y el capital del periodo anterior(c_{t-1}):

$$r_t = {}^{R_t}/_{c_{t-1}} (5)$$

La lógica que subyace en este modelo es la siguiente: el capital aplicado a la inversión al comienzo de cada periodo experimenta incrementos en función de las tasas de rendimiento r_t y de flujos x_t, (ecuaciones 2 y 5). Por lo tanto, la TIRP, a diferencia de la TIR, segrega la evolución de la corriente de capitales (*c*) y flujos de fondos generados por el proyecto (*x*). Dada una corriente de capitales $(c_{0,}c_{1\ldots,}c_{T-1,})$ se puede plantear la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{VA(x/k) = \sum_{t=1}^{T}(R_t - kc_{t-1})(1 + k)^{-t}} \ (6)$$

En la ecuación anterior, el término $(R_t - kc_{t-1})$ expresa las ganancias extraordinarias de la inversión, como la diferencia entre el beneficio esperado del periodo y las ganancias normales, calculadas como el producto entre el rendimiento de mercado k para inversiones de riesgo similar a las estudiadas y el capital inicial c_{t-1}. El concepto anterior se asemeja al empleado por el grupo integrado por los modelos de valuación de

[1] En otras palabras, puede asimilarse al flujo de fondos total libre de la inversión donde x_t representa los flujos libres y $c_t - c_{t-1}$, la inversión incremental en capital de trabajo y activos fijos.

empresas, también conocidos con el nombre de Ganancias Residuales (*Residual Income*); (Pratt y Grabowski, 2008); (Fernández, 2014).

Si $c_{t-1} \neq 0$ para cada $t = 1,2 \ldots .T$ a partir de $\boldsymbol{r_t}$ se pueden definir las ganancias en exceso por unidad de capital invertido como la tasa de rendimiento periódica (ecuación 5):

$$\boldsymbol{VA(x/k) = \sum_{t=1}^{T} c_{t-1}(r_t - k)(1+k)^{-t}} \quad (7)$$

La diferencia $(r_t - k)$ mide las ganancias residuales por unidad de capital invertido, expresión conocida con el nombre de tasa de rendimiento residual (TRR).

Partiendo del concepto de ganancias residuales, se obtiene TIRP, que es un promedio de las tasas periódicas $(\boldsymbol{r_t})$. De hecho, la TIRP es una tasa de rendimiento media e invariante que reemplaza a las tasas periódicas $(\boldsymbol{r_t})$ (ecuación 7) y devuelve el mismo valor presente del proyecto $VA(x/k)$**.** Desde el punto de vista formal, el argumento matemático en el que se apoya esta medida de rendimiento está dado por el concepto de Media de Chisini (Graziani y Veronese, 2009)[2], a partir de la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{\sum_{t=1}^{T} c_{t-1}(r_t - k)(1+k)^{-t} = \sum_{t=1}^{T} c_{t-1}\left(r_p - k\right)(1+k)^{-t}} \quad (8)$$

Despejando, se obtiene:

$$r_p = \frac{\sum_{t=1}^{T} r_t c_{t-1}(1+k)^{-t}}{\sum_{t=1}^{T} c_{t-1}(1+k)^{-t}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} r_t c_{t-1}(1+k)^{-t}}{VA(c/k)} \quad (9)$$

El valor de la media r_p es el promedio ponderado de los rendimientos periódicos r_t. Las ponderaciones de estos se explican por el valor actual de los capitales comprometidos. Esta media se conoce como TIRP[3]. La regla decisoria es:

---

[2] La primera noción de media es propuesta por Cauchy (1821) quien la define como aquel valor intermedio entre el máximo y mínimo de una variable estadística. Esta definición es conocida como *la condición interna de Cauchy*. El concepto de media que recibe especial atención es el de Chisini (1929), donde la media $(\mathcal{M})$ de una variable aleatoria (X) es aquel valor que, respecto de otra función (f) definida en la distribución de frecuencia de (X), deja invariante el valor de $(\mathcal{M})$, es decir, $f(\mathrm{x}_1, \ldots \mathrm{x}_n) = f(\mathcal{M}, \ldots \mathcal{M})$, para todo $\mathrm{x}_1, \ldots \mathrm{x}_n$ en el dominio de f. Por ejemplo, para la típica media aritmética se selecciona la función invariante $f(\mathrm{x}_1, \ldots \mathrm{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ y se impone la restricción de que $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M} x_i$; donde $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i / \sum_{i=1}^{n} p_i$ representa la media aritmética ponderada para las variables x_i con peso p_i. En el caso de la media geométrica $f(\mathrm{x}_1, \ldots \mathrm{x}_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ aplicando la restricción de invarianza, se obtiene $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M} = \mathcal{M}^n$ donde $\mathcal{M} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$. Finalmente, la media armónica es $f(\mathrm{x}_1, \ldots \mathrm{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i / x_i$ donde $\sum_{i=1}^{n} p_i / x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i / x_i$; donde $\mathcal{M} = (\sum_{i=1}^{n} p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i / x_i$ es la media armónica ponderada con peso p_i ; Iurato (2012); Graziani y Veronese, (2009).

[3] La TIRP se diferencia de la propuesta de Hazen (2003; 2009) debido a que en la primera el margen residual es representado por $\left(r_p - k\right)$ y no por la diferencia $(r_t - k)$. Esto, producto de que la TIR(r_t) es sustituida por la media TIRP(r_p). La TIRP es una función hiperbólica de $VA(c/k)$ que se asocia con infinitas combinaciones de flujos de capital y genera la misma r_p para todo valor presente $VP(c/k) \in \mathcal{R}$. A diferencia de la *TIR,* la r_p está definida para cualquier valor de $c_{t-1} \in \mathbb{R}$ y la $r_t = \frac{c_t + x_t}{c_{t-1}} - 1$ no está definida para $c_{t-1} = 0$.

a) si $VA(c/k) > 0$ el proyecto es una inversión y se acepta siempre que $r_p > k$.

b) si $VA(c/k) < 0$ el proyecto es un préstamo y se acepta siempre que $r_p < k$.

Considerando la corriente representativa de ganancias residuales; a partir de las ecuaciones 6 y 9 se arriba a la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{VA(x/k) = (r_p - k)\sum_{t=1}^{T} c_{t-1}(1+k)^{-t} = \frac{r_p - k}{1+k} VA(c/k)} \quad (10)$$

Por ser una media, la TIRP(r_p) no varía ante cambios en la magnitud del capital intermedio (c), en la medida que el valor actual de los capitales $VA(c/k)$, se mantenga invariante. Despejando la ecuación 10 en función de r_p se obtiene el formato operativo en términos de tasa correspondiente a la TIRP:

$$\boldsymbol{r_p = k + \frac{VA_1(x/k)}{VA(c/k)}} \quad (11)$$

La expresión anterior indica que la TIRP es la suma entre el costo del capital y el rendimiento neto incremental por unidad de capital invertido. Alternativamente, la ecuación 11 se puede expresar como el cociente entre el valor actual de las ganancias del proyecto y el valor actual de su flujo de capitales:

$$\boldsymbol{r_p = \frac{\sum_1^T R_t(1+k)^{-(t-1)}}{VP(c/k)}} \quad (12)$$

2.2. La solución formal de la TIRP frente a proyectos mutuamente excluyentes

Una de las principales falencias de la tasa interna de retorno consiste en el ordenamiento de proyectos mutuamente excluyentes, al no considerar la tasa de costo de capital en el cálculo del rendimiento. Para dos proyectos con flujos x e y; si la corriente de capital a invertir es $c(r^x)$ y $c(r^y)$ con tasas internas de retorno r^x, r^y, se obtiene:

$$PV(x/k) = PV(c(r^x)/k)\frac{r^x - k}{1+k} PV(y/k) = PV(c(r^y)/k)\frac{r^y - k}{1+k} \quad (13)$$

Conforme con el criterio de la TIR, cuanto más alto es el rendimiento, mejor ordenamiento recibe el proyecto. Pero para que sea consistente con el criterio del valor actual $PV(c(r^x)/k) = PV(c(r^y)/k)$; es necesario eliminar el problema de escala que presentan todas las medidas de rendimiento, por su condición de ser magnitudes relativas. Esto se resuelve estandarizando la r_a para cada proyecto. Para ello, se supone que P_i es el valor actual del capital agregado de los x_i proyectos $i = 1,2 \ldots n$ y B el capital comparable utilizado para estandarizar las tasas de rendimiento medio ponderado. La TIRP para cada proyecto surge de calcular $r_{a,i}(B)$, tal que

$$\boldsymbol{r_{a,i}(B) = k + \frac{P_i}{B}(r_{a,i} - k)} \quad (14)$$

Donde $r_{a,i}$ es la tasa de rendimiento medio para cada proyecto y se cumple que $max_{1 \leq i \leq n} PV(x_i/k\ ) = max_{1 \leq i \leq n} r_{a,i}(B)$. Por lo tanto, sigue el ordenamiento del valor actual evitando conflictos. El resultado debe interpretarse como el rendimiento medio ponderado, ajustado por unidad de capital comparable (B).

2.3. La TIRP y los costos variables del capital

En aquellos proyectos donde se utilizan costos variables del capital $\bar{k}$, la tasa interna de rendimiento pierde efectividad y punto de comparación para rechazar-aceptar el proyecto. Trabajando con el concepto de Media de Chisini pueden ajustarse la tasa media de rendimiento y el costo variable del capital. A partir de considerar al valor actual como $VP(x/k) = \sum_{t=1}^{n}(R_t - c_{t-1}k_t)(1+k_t)^{-t}$ se llega a:

$$\overline{r_a} = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \ (15)$$

La ponderación la otorga $w_i = c_{t-1}(1+k_t)^{-t}/C$; siendo $C = \sum_{t=1}^{n} c_t\,(1+k_t)^{-t}$, con el fin de cotejarla con una expresión similar de costo de capital $\overline{k_a} = \sum_{i=1}^{n} w_i k_i$.

2.4. La TIRP y la inflación

La teoría de la paridad de los tipos de interés real y nominal de Fisher es la ecuación ampliamente utilizada para establecer la relación entre tasas reales y nominales. La tasa nominal surge de la expresión $k_n = k_r + E(\pi) + k_r \times E(\pi)$ y la tasa real interés $k_r = k_n - E(\pi)/\big(1+E(\pi)\big)$; donde $E(\pi)$ representa la inflación esperada. El valor actual en términos nominales y reales es coincidente, ya que es una medida expresada en unidades monetarias, iniciales (reales) o finales (cierre), presentes. La igualdad $VP_r(x_r/k_r) = VP_n(x_n/k_n)$ requiere de la consistencia entre las monedas en las cuales se expresan los flujos y las tasas (Bradley y Gregg, 2008), (Milanesi, 2017). Esta ecuación de paridad no se puede aplicar directamente en la tasa interna de retorno, debido a que esta representa un promedio sobre flujos de fondos. Es un error intentar pasar de la tasa interna de retorno real a la tasa nominal, y viceversa, utilizando la paridad de Fisher aplicada directamente sobre la tasa $r_r = VP_r(x_r/k_r) = 0$; $r_n = VP_n(x_n/k_n) = 0$. Es menester tomar los flujos de fondos nominales o reales para obtener la respectiva tasa de retorno nominal o real; la regla de aceptación o rechazo es $r_n \geq k_n$ (nominal) $r_r \geq k_r$ (real); si $VP(c/k) > 0$ y viceversa, cuando $VP(c/k) < 0$.

A diferencia de la tasa interna de retorno, la TIRP puede obtenerse aplicando la teoría de la paridad de Fisher. Empleando la ecuación 11 y expresando coherentemente los componentes en términos nominales y reales se llega a expresiones consistentes. Para TIRP en términos reales, se presenta la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{r_{a,r}} = \frac{\boldsymbol{r_{a,n} - E(\pi)}}{\boldsymbol{1 + E(\pi)}} = \boldsymbol{k_r} + \frac{\boldsymbol{(1+k_r)VP(x_r/k_r)}}{\boldsymbol{VP(c_r/k_r)}} \quad (16)$$

En términos nominales:

$$r_{a,n} = r_{a,r} + E(\pi) + r_{a,r} \times E(\pi) = k_n + \frac{(1+k_n)VP(x_n/k_n)}{VP(c_n/k_n)} \quad (17)$$

Y consecuentemente la regla decisoria que se utilizará es $r_{a,n} \geq k_n$(nominal) $r_{a,r} \geq k_r$(real); si $VP(c/k) > 0$ y viceversa, si $VP(c/k) < 0$

3. Análisis de casos: comparaciones entre TIRP, TIR y Valor Presente

En esta sección se procederá a ilustrar mediante ejemplos los principales puntos de conflicto entre la TIR y las consistencias que TIRP presenta con el VP. Serán estudiados e ilustrados los siguientes casos: tasas múltiples; la TIR, como caso especial de la TIRP; selección de proyectos mutuamente excluyentes con diferentes escalas de inversión; selección de proyectos mutuamente excluyentes con vidas desiguales; costo variable del capital y regla de decisión; tratamiento en contextos inflacionarios; consistencia entre tasas de rendimientos esperadas y estocásticas; y, finalmente, el caso de la aditividad del valor en cartera de proyectos.

3.1. Tasas múltiples

Para analizar el problema que presenta la TIR frente a tasas múltiples se toma como caso un proyecto de inversión sobre la concesión de explotación de un yacimiento minero con la siguiente corriente de flujos de fondos: $x = (-\$1.600, \$10.000, -\$10.000)$ y $k = 10\ \%$. El valor presente obtenido es de $VP(x/k) = -\$773.55$, consecuentemente el proyecto debe ser rechazado. La TIR es compleja debido a que existen raíces múltiples en $r^1 = 25\ \%$ y $r^2 = 400\ \%$, por lo que presenta el problema de elección de la tasa apropiada para comparar con el costo del capital. Aplicando la ecuación 11 se calcula r_a y se obtiene:

Tabla 1. Tasas múltiples.

T	x_t	c_t	R_t	r_t	***VP₀(c/k)***	$ 12.509,09
0	$ -1.600,00	$ 1.600,00	$ -	1275,00%	***VP₁(x/k)***	-$850,91
1	$ 10.000,00	$ 12.000,00	$ 20.400,00	-183,33%	***r_a (ec.6)***	3,198%
2	$ -10.000,00	$ -	$ -22.000,00	0,00%	***Decisión***	Rechazo

Fuente: elaboración propia.

Al ser $VP(c/k) > 0$ se está frente a una inversión y la regla de aceptación es $r_a > k$. La estimación de la corriente de capital en este caso es equivalente a $VP(c/k) = VP(c(r)/k)$; donde $c_t = c_{t-1}(1+r) - x_t$. Esta serie se conoce como *Hotelling class* (Hotelling, 1925); (Hazen, 2003); (Magni, 2010). Se rechaza la decisión y el criterio resulta consistente con el $VP(x/k)$, al ser la tasa del 3,19 % inferior a la tasa de costo del capital. Continuando con el ejemplo, se presentan cuatro casos con corrientes de capital $c_1; c_2; c_3; c_4$, dispuestos sus valores arbitrariamente:

Tabla 2. Tasas múltiples Préstamos-Inversiones.

T	**c_1**	***$VP_1(x/10\%)$***	***$VP_0(c_1/10\%)$***	***r_a***	***VP(c/x)<>0***	***Acepto-Rechazo***
0	$ 1.600,00	$ -850,91	$ -3.854,55	32%	PV(c/x)<0	*r_a >k, rechazo*
1	$ -6.000,00					
2	$ -					
T	**c_2**	***$VP_1(x/10\%)$***	***$VP_0(c_2/10\%)$***	***r_a***	***VP(c/x)<>0***	***Acepto-Rechazo***
0	$ 1.600,00	$ -850,91	$ -16.581,82	15%	PV(c/x)<0	*r_a >k, rechazo*
1	$ -20.000,00					
2	$ -					
T	**c_3**	***$VP_1(x/10\%)$***	***$VP_0(c_3/10\%)$***	***r_a***	***VP(c/x)<>0***	***Acepto-Rechazo***
0	$ 1.600,00	$ -850,91	$ 2.509,09	-24%	PV(c/x)<0	*r_a <k, rechazo*
1	$ 1.000,00					
2	$ -					
T	**c_4**	***$VP_1(x/10\%)$***	***$VP_0(c_4/10\%)$***	***r_a***	***VP(c/x)<>0***	***Acepto-Rechazo***
0	$ 1.600,00	$ -850,91	$ 1.600,00	-43%	PV(c/x)<0	*r_a <k, rechazo*
1	$ -					
2	$ -					

Fuente: elaboración propia.

Los primeros dos casos corresponden a un préstamo, mientras que el resto corresponde a inversiones. En todos ellos la tasa de rendimiento medio es consistente con el criterio de valor actual como regla decisoria y arroja un único resultado frente a un proyecto con flujos no convencionales. Por esta razón, r_a sortea satisfactoriamente la posibilidad de existencia de valores complejos o raíces múltiples. Con el objeto de ilustrar los conceptos precedentes, supóngase el siguiente proyecto con la corriente de flujos de fondos $x = (-\$10, \$4, \$5; \$6)$; $c = (\$10, \$11, \$12{,}1)$; $k = 10\ \%$ y $r = 18{,}35\ \%$. A continuación, se procede a sensibilizar la tasa de costo de capital; los resultados se exponen en la siguiente tabla:

Tabla 3. Consistencia entre VP y TIRP.

k	r_a	*VP(c/k)*	*VP(x/k)*	*Decisión*
1%	15,45%	$ 32,75	$ 4,69	A
5%	16,78%	$ 31,45	$ 3,53	A
10%	18,35%	$ 30,00	$ 2,28	A
15%	19,82%	$ 28,71	$ 1,20	A
20%	21,21%	$ 27,57	$ 0,28	A
25%	22,51%	$ 26,54	$ -0,53	R
30%	23,74%	$ 25,62	$ -1,23	R
35%	24,90%	$ 24,79	$ -1,85	R
40%	25,99%	$ 24,03	$ -2,41	R
45%	27,01%	$ 23,34	$ -2,90	R
50%	27,98%	$ 22,71	$ -3,33	R
55%	28,90%	$ 22,13	$ -3,73	R
60%	29,76%	$ 21,60	$ -4,08	R
65%	30,58%	$ 21,11	$ -4,40	R

Fuente: elaboración propia.

La regla decisoria de la TIRP es equivalente al valor presente, ya que si para $VP(c/k) > 0$, el $VP(x/k) \geq 0$, entonces $r_a \geq k$, consecuentemente el proyecto es aceptado.

3.2. La TIR como caso particular de la TIRP

La tasa interna de retorno es un caso particular de TIRP en la medida que el flujo se encuentre asociado a una corriente particular de capital, conocida como flujos de capital equivalente $VP(c/k)$. Conforme fue indicado, al vector que describe la corriente de capital explicada por los flujos y el rendimiento se lo conoce como *Hotelling class*. La serie contiene infinitos vectores $c_t \in \mathbb{R}^T$ que satisfacen la ecuación $\sum_0^{T-1} c_t(1+r)^{-t} = VP(c(r)/k)$. Cualquier corriente de capital contenida en la misma clase, con valor presente equivalente, genera la misma r_a ya que esta no depende solamente de c_t en la medida que $VP(c/k)$ se mantenga invariante. Entonces, para esta clase de flujo de capital $r_a\big(VP(c/k)\big) = r$. Consecuentemente $r = k + [VP_1(x/k)/VP(c(r)/k)] = r_a$ (Hazen, 2003); (Magni, 2010). Para ilustrar los conceptos precedentes serán consideradas dos corrientes de flujos de fondos operativos $x1_t = (-\$1.000; \$500; \$500; \$500)$ y $x2_t = (-\$1.500; \$500; \$800; \$300)$; las tasas internas de retorno son $r1 = 23{,}38$ % y $r2 = 3{,}52$ % y $k = 5$ %. En la siguiente tabla se expone el cálculo de la corriente de capital equivalente y la correspondiente tasa media de rendimiento.

Tabla 4. la TIR como caso especial de la TIRP.

T	x_1	*VP(c/5%)*	$c_t=c_{t-1}(1+r)-x_t$	$R_t=c_t-c_{t-1}+x_t$	$VP_0(x/5\%)$	$VP_1(x/5\%)$	$r_{1a}(ec.6)$
0	$ -1.000,00	$ 2.066,40	$ 1.000,00	$ -	$ 361,62	$ 379,71	23,38%
1	$ 500,00		$ 733,75	$ 233,75			
2	$ 500,00		$ 405,27	$ 171,52			
3	$ 500,00		$ -	$ 94,73			
T	x_2	*VP(c/5%)*	$c_t=c_{t-1}(1+r)-x_t$	$R_t=c_t-c_{t-1}+x_t$	$VP_0(x/5\%)$	$VP_1(x/5\%)$	$r_{2a}(ec.6)$
0	$ -1.500,00	$ 2.765,50	$ 1.500,00	$ -	$ -39,03	$ -40,99	3,52%
1	$ 500,00		$ 1.052,77	$ 52,77			
2	$ 800,00		$ 289,80	$ 37,04			
3	$ 300,00		$ -	$ 10,20			

Fuente: elaboración propia.

Ambos proyectos representan inversiones, ya que $VP(c/k) > 0$. El primer caso se acepta, puesto que $VP(x/k) > 0$, $r > k$,$r_a > k$; el segundo se rechaza. En ambos proyectos $r_a = r$, corroborándose que la tasa interna de retorno es un caso particular de la tasa promedio. A modo de ejemplo se procede a sensibilizar el costo de capital con el fin de analizar el comportamiento de la tasa de rendimiento medio y la tasa interna de retorno.

Tabla 5. TIR como caso particular de TIRP.

k	*VP(x/k)*	*VP(c/k)*	r_a	*r*
1%	$ 470,49	$ 2.123,77	23,38%	23,38%
5%	$ 361,62	$ 2.066,40	23,38%	23,38%
10%	$ 243,43	$ 2.001,98	23,38%	23,38%
20%	$ 53,24	$ 1.892,90	23,38%	23,38%
30%	$ -91,94	$ 1.804,23	23,38%	23,38%
40%	$ -205,54	$ 1.730,88	23,38%	23,38%
50%	$ -296,30	$ 1.669,29	23,38%	23,38%
60%	$ -370,12	$ 1.616,90	23,38%	23,38%
70%	$ -431,10	$ 1.571,85	23,38%	23,38%
80%	$ -482,17	$ 1.532,72	23,38%	23,38%
90%	$ -525,44	$ 1.498,45	23,38%	23,38%
100%	$ -562,50	$ 1.468,19	23,38%	23,38%
150%	$ -688,00	$ 1.358,34	23,38%	23,38%
200%	$ -759,26	$ 1.289,61	23,38%	23,38%

Fuente: elaboración propia.

En la tabla anterior se ilustra cómo la TIRP se mantiene invariante y coincide con TIR ante cambios en k. Esto es así debido a que las tasas de rendimientos periódicas r_t son obtenidas a partir de un capital, que crece a razón de $(1 + r)$ siendo $c_t = c_{t-1}(1 + r)^1 - x_t$. Constatamos entonces que el vector de flujos se corresponde con un vector de capitales que genera el rendimiento.

3.3. Selección de proyectos mutuamente excluyentes con diferentes tamaños

Las inconsistencias de la tasas de retorno frente al criterio del valor actual en el ordenamiento de proyectos excluyentes es resuelta por la tasa de rendimiento medio. Esta solución se logra a partir de que la TIRP considera el costo de capital y resuelve el tema de los tamaños, según ecuación 14.

A continuación se ilustra el comportamiento de la r_a en el ordenamiento de proyectos excluyentes, de diferente escala y duración, considerando que no existe repetición. Supóngase que debe seleccionarse entre tres alternativas de inversión: $x1_t = (-\$1.000;\ \$565;\ \$400;\ \$300)$; $x2_t = (-\$800;\ \$700;\ \$100;\ \$50;\ \$200)$; $x3_t = (-\$400;\ \$500;\ \$10)$; de diferente escala y $k = 5\ \%$. El factor de escala (*benchmarking* de proyectos) es $B = \$100$. Esto significa que se calcula un rendimiento promedio relativo a una escala de magnitud *B*. En la siguiente tabla se presenta el valor actual, la tasa interna de retorno y la tasa de rendimiento medio ponderada estandarizada:

Tabla 6. Ordenamiento de proyectos excluyentes de diferente magnitud.

t	x_1	x_2	x_3	c_1	c_2	c_3	r_1	r_2	r_3	***R***
0	-1.000	-800	-400	1.000	800	400,00	14,4%	17,9%	27,0%	3>2>1
1	565	700	500	579	243	7,88	***$VP_1(x/k)$***	***$VP_2(x/k)$***	***$VP_3(x/k)$***	***R***
2	400	100	10	262	186		160,05	165,1	85,2	2>1>3
3	300	50			170		***$r_a(b)_1$ (Ec.13)***	***$r_a(b)_2$ (Ec.13)***	***$r_a(b)_3$ (Ec.13)***	***R***
4		200					173,1%	178,4%	94,5%	2>1>3

Fuente: elaboración propia.

Se puede apreciar como $r_{a,i}(B)$ respeta el ordenamiento del Valor Presente, $R = 2 > 1 > 3$ y resuelve el problema de las escalas al incorporar el factor (B). A los efectos de analizar la correspondencia entre VP y la TIRP estandarizada, se procede a sensibilizar el costo del capital y analizar los cruces en los perfiles económicos de los proyectos:

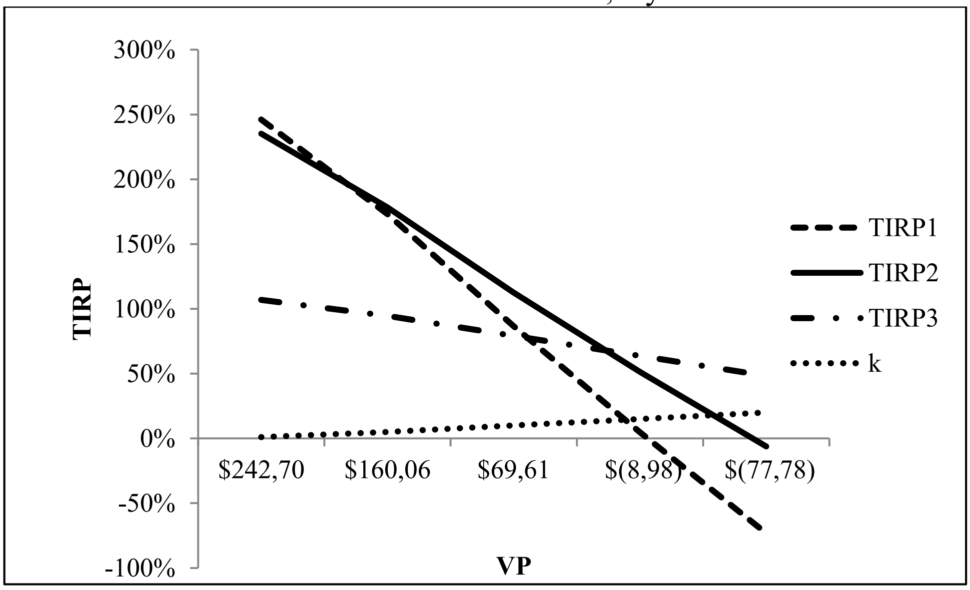
Tabla 7. Consistencia entre TIRP y VP.

k	$VP_1(x/k)$	$VP_2(x/k)$	$VP_3(x/k)$	*R*
1%	$ 242,70	$ 231,82	$ 104,85	1
5%	$ 160,06	$ 165,10	$ 85,26	2
10%	$ 69,61	$ 93,18	$ 62,81	2
15%	$ -8,98	$ 31,54	$ 42,34	3
20%	$ -77,78	$ -21,84	$ 23,61	3
k	$r_{a1(B)(ec.13)}$	$r_{a2(B)(ec.13)}$	$r_{a3(B)(ec.13)}$	*R*
1%	246%	235%	107%	1
5%	173%	178%	95%	2
10%	87%	112%	79%	2
15%	5%	51%	64%	3
20%	-73%	-6%	48%	3

Fuente: elaboración propia.

La tabla 7 pone de manifiesto la consistencia entre el valor presente y la tasa de rendimiento medio en el ordenamiento de proyectos ante diferentes costos de capital, sin perjuicio de que estos presenten diferentes sensibilidades a las tasas de costo de capital. La siguiente ilustración relaciona perfiles del VP con la TIRP de los tres proyectos indicados, según tasas de costo del capital.

Gráfico 1. Relación entre VP, k y TIRP.



Fuente: elaboración propia.

3.4. Selección de proyectos mutuamente excluyentes con vidas desiguales

En caso de repetición automática y equivalente de las alternativas de inversión (Emery, 1982); (Briozzo y Milanesi, 2006), el comportamiento entre la TIRP estandarizada y el VP se manifiesta consistente. Continuando con el supuesto anterior, si se utiliza el método de la cadena de reemplazo para igualar la duración de las tres alternativas, se debe optar por la duración mínima común de doce periodos. Consecuentemente, la corriente de flujos de fondos de capital queda expresada en la siguiente tabla:

Tabla 8. Vidas desiguales: Cadenas de reemplazo. Consistencia entre resultados arrojados por TIRP VP.

T	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
x_1	-1.000	565	400	-700	565	400	-700	565	400	-700	565	400	300
x_2	-800	700	100	50	-600	700	100	50	-600	700	100	50	200
x_3	-400	500	-390	500	-390	500	-390	500	-390	500	-390	500	
c_1	1.000,0	578,9	262,3	1.000,0	578,9	262,3	1.000,0	578,9	262,3	1.000,0	578,9	262,3	-
c_2	800,0	243,0	186,4	169,7	800,0	243,0	186,4	169,7	800,0	243,0	186,4	169,7	-
c_3	400,0	7,9	400,0	7,9	400,0	7,9	400,0	7,9	400,0	7,9	400,0	7,9	-

Fuente: elaboración propia.

Calculando el VP, la TIR y la TIRP, se obtiene el siguiente ordenamiento:

Tabla 9. Vidas desiguales cadenas de reemplazo consistencia TIRP VP.

r_1	r_2	r_3	***R***
14,39%	17,87%	26,97%	3>2>1
$VP_{1CR}(x/k)$	***$VP_{2CR}(x/k)$***	***$VP_{3CR}(x/k)$***	***R***
520,94	412,68	406,41	1>2>3
$r_a(B)_1$ *(ec.13)*	***$r_a(B)_2$*** *(ec.13)*	***$r_a(B)_3$*** *(ec.13)*	***R***
27,35%	21,67%	21,34%	1>2>3

Fuente: elaboración propia.

Nuevamente se puede apreciar la consistencia entre el criterio de la TIRP estandarizada y el VP. Si se trabaja con anualidades equivalentes, estas serán calculadas con la siguiente expresión: $AE_i = VP_i(x/k)/\{1/k - [1/(k-(1+k)^t)]\}$. En la situación planteada las anualidades equivalentes para cada proyecto son $AE_1 = \$58{,}77$; $AE_2 = \$46{,}56$; $AE_3 = \$45{,}85$. Si se supone repetición indefinida hasta perpetuidad[4] se procede a calcular el valor de la anualidad equivalente a perpetuidad y con este se calcula la tasa de rendimiento medio ponderado estandarizada, conforme se presenta a continuación:

[4] En el caso que se reproduzca el horizonte de la cadena de reemplazo las anualidades deberían ser repetidas por doce periodos, actualizadas al costo de capital y arrojar el mismo resultado.

Tabla 10. Anualidades Equivalentes y TIRP.

$VP_1(c/k)$	***$VP_2(c/k)$***	***$VP_3(c/k)$***
$ 5.823,35	$ 3.366,91	$ 1.942,43
$VP_{1,0}(x/k)$perpetuidad	***$VP_{2,0}(c/k)$perpetuidad***	***$VP_{3,0}(c/k)$perpetuidad***
$ 1.175,50	$ 931,21	$ 917,07
$VP_{1,1}(x/k)$perpetuidad	***$VP_{2,1}(c/k)$perpetuidad***	***$VP_{3,1}(c/k)$perpetuidad***
$ 1.234,27	$ 977,78	$ 962,93
$r_a(B)_1$ (ec.13)	***$r_a(B)_2$ (ec.13)***	***$r_a(B)_3$ (ec.13)***
62%	49%	48%

Fuente: elaboración propia.

La tabla anterior expone resultados consistentes entre el método del VP a perpetuidad y la TIRP estandarizada.

3.5. Costos variables del capital

Este es el caso en que las tasas de costo de capital varían en el tiempo y surge la pregunta de qué tasa de costo variable tomar para comparar con la TIR. Considerado un proyecto de inversión con corriente de flujos de fondos x, capital c, será utilizada la ecuación 15 para estimar la tasa de rendimiento medio ponderada. A continuación, los datos del ejemplo:

Tabla 11. Tasas de costo del capital variables y TIRP.

t	*x_t*	c_t	*k*	*R*	*w_i*	*wi/C*	*R_t*	*r_t*	*20*
0	-10.000,00	10.000,00	22%	20%	10.000,00	40,35%		-20%	20,47%
1	2.000,00	6.000,00	22%	***VP(x/k)***	4.918,03	19,84%	-2.000,00	67%	***k (promedio)***
2	-3.000,00	13.000,00	8%	1.241,78	9.866,42	39,81%	4.000,00	38%	16,43%
3	18.000,00	-	15%	***VP(c/k)***	-	0,00%	5.000,00		
				24.784,46	***C=24.784,46***	100,00%			

Fuente: elaboración propia.

La TIR asciende a 20 % pero la incógnita que surge es contra qué costo del capital comparar. Una alternativa es cotejarla directamente con el costo promedio ponderado en los diferentes periodos de tiempo, $\bar{k} = 16{,}43\ \%$ aceptando el proyecto; sin embargo, la tasa de rendimiento no considera el retorno obtenido sobre el capital invertido. Una medida que mejor se ajusta es la TIRP. En este caso $\overline{r_a} = 20{,}47\ \%$ surge como el promedio ponderado de los rendimientos periódicos (r_t) sobre el capital invertido. La ponderación está dada por el valor actual de las corrientes de capital (w_i), conforme fue explicado en la sección precedente.

3.6. Inflación y TIRP

A continuación será ilustrada la consistencia de la TIRP nominal y real, que subsana los defectos de promedios de la TIR, en cuanto a la inflación y la imposibilidad de aplicar la ecuación de paridad de Fisher. Supóngase un proyecto de inversión con la siguiente corriente de flujo de fondos nominales $x_t = (-\$1.000;\ \$600;\ \$400)$ y corriente de capitales invertidos de $c_t = (\$1.000;\ -\$500;\ \$100)$. Las tasas en términos nominales son $k_n = 20\ \%$; $r_n = 24{,}22\ \%$, $r_{a,n} = 31{,}91\ \%$ (ecuación 11). Para expresarlas en términos reales es menester conocer la inflación esperada. Si consideramos una tasa esperada anual constante de inflación $E(\pi_t) = 10\ \%$, la expresión para calcular los índices (id_t) periódicos de inflación es $id_t = id_{t-1} \times (1 + E(\pi_t))$. Estos índices son empleados para deflactar los flujos nominales y la tasa de costo de capital. En las siguientes tablas se presentan los resultados:

Tabla 12. Flujos de beneficios, capitales y tasas de proyecto nominales y reales.

t	x_{tn}	c_{tn}	x_{tr}	c_{tr}	id	k_n	k_r	r_n
0	-1000	1000	-1000,00	1000,00	1			24,22%
1	500	-500	454,55	-454,55	1,1	20%	9,09%	r_r
2	600	100	495,87	82,64	1,21	20%	9,09%	12,93%
3	400	0	300,53	0,00	1,331	20%	9,09%	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 13. Consistencia VP-TIRP nominal y real.

$VP(x/k)_{(n)}$	$VP(x/k_{(r)}$	$r_{a,n}$	$r_{a,r\ (ec.15)}$
64,81	64,81	31,91%	19,92%
$VP(c/k)_{(n)}$	$VP(c/k)_{(r)}$		$r_{a,r\ (ec.15)}$
652,78	652,78		19,92%

Fuente: elaboración propia.

En la tabla 12 se presentan los flujos de fondos nominales y reales. En este caso se deflacta con la expresión $x_{r,t} = x_{n,t}/id_t$. La tasa de costo de capital real se obtiene aplicando la relación de Fisher. En cambio, la expresión en términos reales de la tasa interna de retorno, se obtiene calculando r_r sobre los flujos de fondos reales, nunca se puede hacer el pasaje con los nominales, puesto que la inflación es un promedio. En el caso de la TIRP se convierte en términos reales por dos caminos: aplicando el lado derecho de la ecuación 16, es decir, aplicando directamente la relación de Fisher o deflactando flujos (lado izquierdo ecuación 16).

3.7. Efecto de referencia. TIRP de flujos de fondos esperados y TIRP esperada

La decisión tomada por un inversor racional, en el sentido clásico, debería ser la misma para cualquier marco de referencia, independientemente del contexto. La violación a este principio de invariancia en la decisión, es conocida como efecto de referencia (Kahneman y Tversky, 1979). En este caso se puede demostrar que la TIR presenta efectos de referencia, según se trabaje con la medida flujos de fondos estocásticos asociados a escenarios o con flujos de fondos esperados. En el primer supuesto, se calcula la TIR para cada uno de los probables flujos de fondos asociados a un escenario: $\hat{x} = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2} \dots \widehat{x_n})\widehat{x_t}; t = 1,2,..n$. Seguidamente se obtiene una tasa de rendimiento promedio ponderada o TIR de los flujos estocásticos ($\hat{r}$,). En el segundo, la tasa de rendimiento r se calcula a partir de la esperanza matemática de los flujos de fondos del proyecto $E(\widehat{x}) = \left(E(\widehat{x_1}), E(\widehat{x_2}) \dots E(\widehat{x_n})\right)$. Aquí la TIR es esperada, $E(\hat{r})$ al determinarse a partir del valor esperado de los flujos estocásticos. Matemáticamente es simple apreciar que $\hat{r} \neq E(\hat{r})$; puesto que presenta una inconsistencia que será evidenciada en el siguiente ejemplo:

Tabla 14. TIR estocástica y esperada.

Caso	***0***	***1***	***2***	***3***	***P(x)***	***r***
Optimista	-1000	800	1200	500	0,3	68,70%
Base	-1000	1000	0	0	0,5	0,00%
Pesimista	-1000	600	0	0	0,2	-40,00%
E(f)	-1000	860	360	150		

Fuente: elaboración propia.

En el caso de la TIR el valor de $\hat{r}$ es de 12,61 %; el valor de $E(\hat{r})$ es de 24,57 %. Si se considera un k = 15 % se obtiene un $E(VP)$ de \$118,67. Entonces la pregunta que emerge es la siguiente: ¿cuál TIR es válida, $\hat{r} < k$ o$E(\hat{r})$>k? Queda demostrada la existencia de un efecto referencia para aceptar o rechazar la decisión de inversión. La TIRP resuelve este problema. Supóngase que $\hat{r_a} = k + \frac{VP_1(\hat{x}/k)}{VP(c/k)}$ es la TIRP estocástica del proyecto para un capital base de pesos c. La TIRP esperada es $E(\hat{r_a}) = k + \frac{E(VP_1\left(\frac{\hat{x}}{k}\right))}{VP(c/k)}$ Matemáticamente se cumple que $\widehat{r_a} = E(\widehat{r_a})$. La corriente de capitales es c_0 = \$1.000, c_1= \$660 y c_2 = \$330.

Tabla 15. TIRP estocástica y esperada.

E(VP(x/K))	$ 136,47	TIRP optimista	66,10%	0,3
VP(c/K)	$ 1.823,44	TIRP base	7,85%	0,5
k	15%	TIRP pesimista	-11,23%	0,2
E(TIRP)	22%		TIRP estocástica	22%

Fuente: elaboración propia.

La TIRP arroja un valor consistente puesto que $E(\hat{r}_a) = 0.15 + \frac{136,47}{1823,44} = \hat{r}_a = (0.3 \times 0.6610 + 0.5 \times 0.0785 + 0,2 \times -0.1123) = 22\ \%$. No se produce efecto referencia ya que las medidas conducen a la misma conclusión y son consistentes para ser comparadas con el costo del capital.

3.8. Efecto de referencia. Aditividad del valor

El capital invertido en un conjunto de proyectos es, por el principio de aditividad, equivalente a la sumatoria de sus valores actuales: $C_m = \sum_{j=1}^{n} C_j$. La debilidad que presenta la TIR surge de considerar solamente el rendimiento de manera endógena a partir del vector de flujos de fondos, dejando de lado a las corrientes de capitales invertidos. La TIRP subsana este problema, ya que las corrientes de capitales se fijan exógenamente y, consecuentemente, permite la suma de ellos. En efecto, la suma de los valores actuales individuales correspondientes a las corrientes de capitales $C_1 + C_2 + C_j + \cdots + C_n$ coincide con el valor actual de la corriente agregada de capitales $C^{1+2+j..+n}$. Esta igualdad no se verifica en la TIR. La siguiente tabla presenta una serie de flujos de fondos asociados a tres inversiones, sus correspondientes TIR, la TIR de la cartera calculada a partir de las participaciones en la inversión inicial y la TIR obtenida de agregar los flujos:

Tabla 16. TIR y aditividad.

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*TIR individual*	*Participación*
A	$ -800,00	$ 200,00	$ 200,00	$ 200,00	$ 200,00	0%	57%
B	$ -200,00	$ 500,00				150%	14%
C	$ -400,00	$ -	$ 200,00	$ 400,00		17%	29%
suma	***$ -1.400,00***	***$ 700,00***	***$ 400,00***	***$ 600,00***	***$ 200,00***	***15,82%***	***TIR(x1+x2+x3)***
						26,15%	***TIR(ponderada)***

Fuente: elaboración propia.

Los resultados de la tabla ponen de manifiesto el problema de endogeneidad de la TIR, al no considerar la corriente de capitales involucrados en el proyecto. Adicionalmente, si se calcula la corriente de capitales a las TIR involucradas, se verifica la siguiente inconsistencia:

Tabla 17. TIR y corrientes de capitales.

c	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
A	$ 800,00	$ 600,00	$ 400,00	$ 200,00	$ -
B	$ 200,00	$ -			
C	$ 400,00	$ 466,15	$ 399,33	$ -	
C1+C2+C3	$ 1.400,00	$ 1.066,15	$ 799,33	$ 200,00	***$ 3.465,48***
C (15,82 %)	$ 1.400,00	$ 921,43	$ 667,17	$ 172,69	***$ 3.161,28***

Fuente: elaboración propia.

Se aprecia así, cómo la corriente de capitales intermedios $c_t = c_{t-1}(1 + r_t) - x_t$ actualizados a la TIR individual y a la TIR agregada (15,82 %) no son consistentes, es decir, $C_1 + C_2 + C_3(3465{,}48) \neq C^{1+2+3}(3161{,}28)$. Si trabajamos con la TIRP, al considerar el vector de capitales y flujos por separado, se verifica la igualdad aludida. En efecto, suponiendo una k = 10 % se tiene:

Tabla 18. TIRP y corrientes de capitales.

VP1(c/k)	VP2(c/k)	VP3(c/k)	***VP (c/k) total***
$ 1.826,30	$ 200,00	$ 1.153,80	***$ 3.180,10***
		VP(c/k) suma	***$ 3.180,10***
		TIRP	15,34%

Fuente: elaboración propia.

Para la TIRP el vector de capitales es consistente, ya sea calculado individualmente para luego sumarlo, o directamente desde la consolidación del flujo de fondos inicial $c_t = 1400$ con los intermedios, empleando la ecuación 4 (tasa de costo de capital y flujos consolidados). En dicha situación tenemos $C_1 + C_2 + C_3(3180{,}10) = C^{1+2+3}(3180{,}10)$ y la TIRP asciende a 15,34 %, cumpliendo con la condición de aditividad del valor.

4. Conclusiones

La TIR es una medida relativa empleada para referenciar y comparar rendimientos de una corriente de flujos. Una de sus principales ventajas reside en su fácil interpretación por parte del usuario. Pero dicho atributo cede frente a los problemas que presenta la medida, a saber: ordenamientos de proyectos de inversión mutuamente excluyentes de diferentes escalas, proyectos con vidas desiguales, tasas variables de costo del capital, inflación, inconsistencias entre las TIR estocásticas y esperadas y aditividad del valor. Todas estas situaciones se generan debido a que la TIR considera solamente el vector de flujos, sin incorporar en el análisis la corriente de capitales que genera los flujos y el rendimiento. La TIRP se erige como una solución, utilizando en su construcción el concepto de Media de Chisini y la regla de Hotteling. Incorpora a la corriente de capitales dentro de la construcción de la tasa y esto permite enmendar las limitaciones enumeradas para la TIR. Los resultados arrojados por la TIRP son consistentes con los producidos por el valor presente, pero sin perder la simplicidad comunicativa y de referencia, propia de toda medida relativa.

Bibliografía

Boulding, K. (1935). The theory of single investment. *Quaterly Journal of Economics,* (49), 475-494.

Bradley, M-Gregg, J. (2008). Expected Inflation and the Constant Growth Valuation Model. *Journal of Applied Corporate Finance, 20*(2), 66-79.

Briozzo, A-Milanesi, G. (2006). Proyectos mutuamente excluyentes con vidas desiguales: extensiones al análisis tradicional. *XXVI Jornadas Nacionales de Docentes en Administración Financiera (SADAF)*, 18-42.

Emery, G. (1982). Some guidelines for evaluanting capital investment alternatives with unequal lives. *Financial Management*, 14-19.

Fernández, P. (2014). *Valoración de Empresas y Sensatez* (3.ª ed.). Barcelona : IESE Business School-Universidad de Navarra .

Fisher, I. (1930). *The Theory of Interest* . New York: MacMillan (reprinted Clifton NJ 1974).

Graziani, R-Veronese, P. (2009). How to compute a mean? The Chisini approach and its applications. *The American Statisticians , 63*(1), 33-36.

Hazen, G. (2003). A new perspective on multiples internal rates of returns. *The Engineering Economist, 48*(1), 31-51.

Hazen, G. (2009). An extension of internal rate of returns to stochastic cash flow. *Management Science, 55*(6), 1030-1034.

Hotelling, H. (1925). A general mathematical theory of depreciation. *Journal of the American Statistical Association,* 27-38.

Iurato, G. (2012). A note on Oscar Chisini mean value definition. *Science (QRDS) Quaderni di Ricerca in Didattica/Science (QRDS),* (4), 1,7.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. *Econometrica, 47*(2), 263-292.

Keynes, J. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Londres: MacMillan.

Magni, C. (2010). Average Internal Rate of Return and investment decision: a new perspective. *The Engineering Economist, 55*(2), 150-180.

Magni, C. (2013). The internal rate of return approach and the AIRR paradigm: a refutation and a corroboration. (http://ssrn.com/abstract=2172965, Ed.) *Working Paper*.

Milanesi, G. (2016). La Tasa Interna de Retorno Promedio Borrosa: Desarrollos y Aplicaciones. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science, 21*, 39-47.

Milanesi, G. (2017). Inflación y descuento de flujo de fondos en dos monedas. Un enfoque integral. *Revista Argentina de Investigación de Negocios (RAIN), 3*(1), 89-104.

Pratt; S-Grabowski; R. (2008). *Cost Of Capital: Applications and Examples* (3.ª ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.