MONOGRAFIA SOBRE LAS CURVAS PARALELAS

Por el Ingeniero Químico WALTER E. DAUB

Profesor contratado por el Instituto Tecnológico del Sur.

Dada una curva plana, de ecuación cartesiana implícita $f(x,y) = 0$, si en cada punto de la misma, trazamos la normal

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial y} = (Y-y)\frac{\partial f}{\partial x}$$

y consideramos, en ambos sentidos a partir de la intersección con la curva, sobre dicha normal, sendos segmentos de recta de longitud "k", los extremos de los mismos definirán dos curvas, paralelas a la dada y en general, de naturaleaz distinta, una interior y la otra exterior, distantes "k" unidades de longitud de la curva dada. Fig. 1.

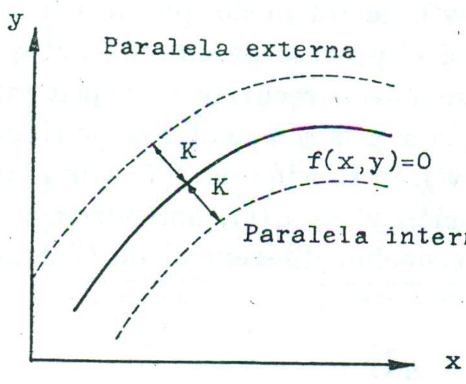

Fig. 1

Llamando (X,Y) las coordenadas cartesianas ortogonales del punto correspondiente al (x,y) de la curva dada, tendremos las ecuaciones:

(1) $f(x,y) = 0$

(2) $(X-x)^2 + (Y-y)^2 = k^2$

(3) $(X-x)\frac{\partial f}{\partial y} = (Y-y)\frac{\partial f}{\partial x}$

que nos expresan, respectivamente, que el punto $P(x,y)$ pertenece a la curva dada, que la distancia del punto homólogo (X,Y) de las curvas paralelas al punto (x,y) es de "k" unidades de longitud y que los puntos (x,y) y el (X,Y) están sobre la normal trazada a la curva dada, por el punto (x,y). Eliminando x e y entre las tres ecuaciones anteriores, obtendremos una ecuación que relaciona implícitamente X con Y, esto es, la ecuación de la curva paralela buscada. El razonamiento para hallar la paralela interna y la externa, lo haremos más adelante al dar algunos casos prácticos.

Otra manera de obtener dichas ecuaciones consiste en partir de la ecuación diferencial de Clairaut de las rectas tangentes a la curva dada, que constituyen una familia simplemente infinita. Evidentemente, la integral general de la ecuación de Clairaut indicada, será dicha familia de rectas tangentes, su integral singular, la envolvente de las mismas, que es la curva dada. Veamos en qué forma se obtiene dicha ecuación diferencial, a partir de la ecuación f(x,y) de la curva dada. Por la teoría de la diferencial total, aplicada a las funciones implícitas de una variable, tenemos:

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

A continuación se reemplaza en la ecuación de la curva el valor de la ordenada "y" po rla expresión: $[y'x + \varphi(y')]$, teniéndose:

$$(4) \qquad f\,[\,x\,,\, y'x + \varphi(y')\,] = O$$

en que se debe determinar la función $\varphi(y')$ de tal modo que la (4) resulte idénticamente nula. Naturalmente, si el proceso de eliminación que ello implica, resultase muy complicado, se puede recurrir al expediente de expresar, mediante un parámetro "t", la x y la y, calcular a continuación y' en función de "t" y finalmente $\varphi(y')$ en función de "t". Eliminando ahora t entre $\varphi(y') = \psi(t)$ y la ecuación $y' = u(t)$, obtendremos la función $\varphi(y')$ buscada. Hallada ésta, la ecuación diferencial de Clairaut será:

$$(5) \qquad y = y'x + \varphi(y')$$

A partir de dicha ecuación diferencial, hemos de hallar ahora la ecuación diferencial de Clairaut de las curvas paralelas a la dada, cuya integral general nos dé la familia simplemente infinita de rectas tangentes a dichas curvas y cuya integral singular, por consiguiente, será la ecuación de las curvas paralelas buscadas, siendo además necesaria una discri-

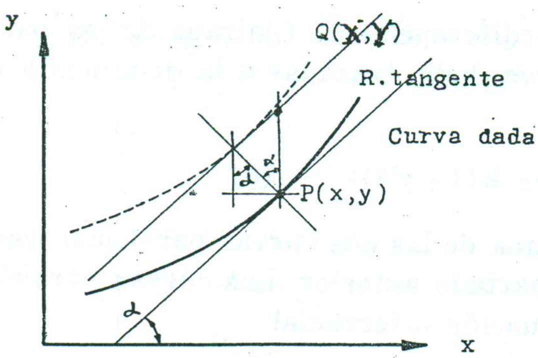

Fig. 2

minación de signos para hallar respectivamente, las paralelas interior y exterior a la curva dada.

En la fig. 2 se puede ver que la ordenada Y del punto homólogo al P(x,y) se obtiene incrementando la *y* mediante la proyección del segmento dirigido PQ, de módulo k, sobre el eje de las ordenadas o una paralela cualquiera al mismo, como por ejemplo la trazada por el punto Q.

Si llamamos α al ángulo que forma la recta tangente trazada a la curva dada por P, con la dirección del eje de las "x" considerada en su sentido positivo, claro está que el ángulo formado por el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, con el sentido positivo de la dirección del eje de las ordenadas, será igual a α o a $(\pi - \alpha)$ según que y' sea creciente o decreciente, para la paralela trazada en la región de concavidad de la curva que llamamos interna. Un razonamiento análogo se hace para la paralela externa. Es claro que si la curva dada presenta puntos de inflexión, no puede discriminarse cuál es la paralela interna, cuál la externa, en base a la concavidad y convexidad de la curva dada. Podemos hablar entonces, por ejemplo, de paralela izquierda y derecha, según las intersecciones de las tres curvas con el eje de las abscisas, o de paralela superior e inferior, según

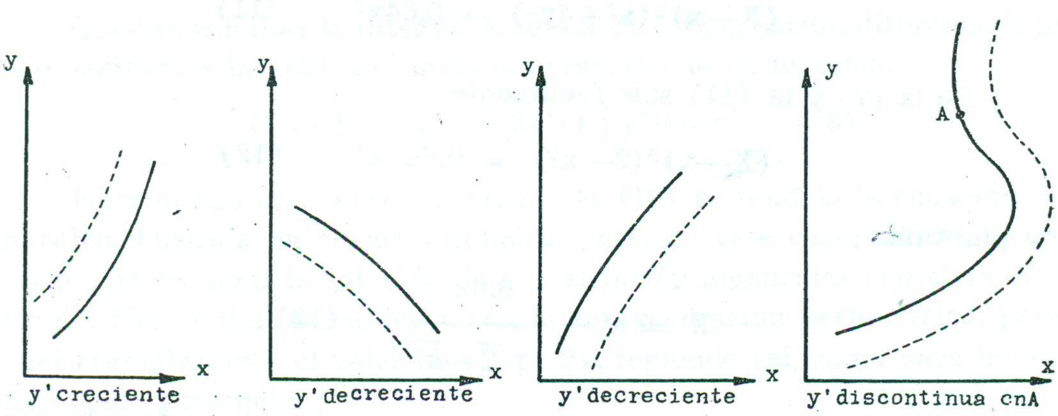

Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

la ubicación relativa de los puntos de intersección de las tres curvas con el eje de las ordenadas. Las figuras (3) a (6) ilustran gráficamente lo expuesto.

De modo que se tiene que $\Delta\, y = \dfrac{k}{\cos \alpha} = k(1+tg^2\alpha)^{\frac{1}{2}} = k(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$

siendo por consiguiente la ecuación diferencial de Clairaut de las paralelas a las rectas tangentes a la curva dada, trazadas a la distancia k de la misma, la siguiente:

$$y = x.y' + \varphi(y') \pm k(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

correspondiendo cada signo a cada una de las dos curvas paralelas, según las discriminaciones hechas en el apartado anterior. Las curvas paralelas son la integral singular de dicha ecuación diferencial.

Veamos un caso práctico: Hallar la paralela a la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 1$, interior a la misma y a la distancia $k = 0{,}8$. Procediendo de acuerdo al primer método, tendremos:

$$(7) \qquad x^2+2y^2-1 = 0$$

$$(8) \qquad (X-x)^2 + (Y-y)^2 = 0{,}64$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y$ de donde: (9) $(X-x).4y = (Y-y).2x$ de la

que sale de inmediato: (10) $(X-x)^2.4y^2 = (Y-y)^2.x^2$

Multiplicando la (8) por x^2 y sumando este resultado a la (10), sale:

$$(X-x)^2(x^2+4y^2) = 0{,}64x^2 \qquad (11)$$

De la (7) y la (11) sale fácilmente

$$(X-x)^2(2-x^2) = 0{,}64\ x^2 \qquad (12)$$

y por tanto:

$$X = x - \frac{0{,}8x}{\sqrt{2-x^2}} \qquad (13)$$

tomándose el signo menos de la raíz, por corresponder éste a la paralela interna. Para hallar el valor de Y, bastará eliminar $(X-x)^2$ entre la (8) y la (10), teniendo así:

$$Y = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-x^2)} \mp 0{,}8. \sqrt{\frac{2-x^2}{2(1-x^2)}} \qquad (14)$$

correspondiéndose los signos $(+\ -)$ y $(-\ +)$ solamente.

En la fig. 7 puede verse la elipse del ejemplo anterior así como su paralela interna y se ve bien a las claras que no es otra elipse como intuivamente podría creerse a primera vista introspectiva.

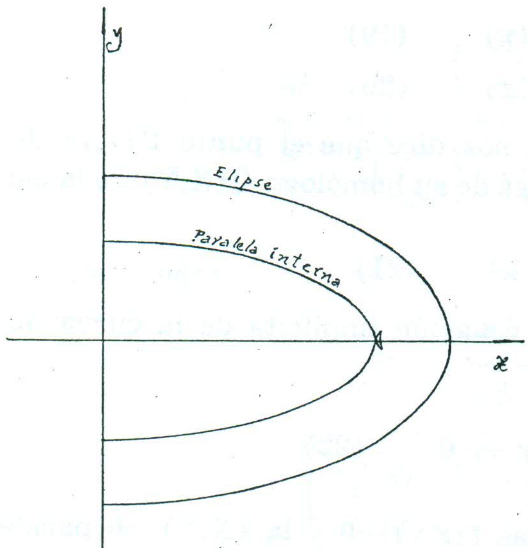

Fig. 7

Vamos a hallar ahora la paralela interna a la parábola $y = x^2$, a la distancia 3, aplicando esta vez el método de la ecuación diferencial de Clairaut.

Tendremos las ecuaciones sucesivas:

$$y = x^2$$
$$y' = 2x$$
$$xy' = 2x^2$$
$$2x^2 + \varphi(y') = y = x^2$$
$$\varphi(y') = -x^2$$
$$\varphi(y') = -\tfrac{1}{4}y'^2$$

De donde: $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$ es la ecuación diferencial de Clairaut cuya integral singular es la parábola dada. La de las tangentes trazadas interiormente a la curva paralela a la distancia constante 3, será:

$$Y = y'X - \tfrac{1}{4}y'^2 + 3(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (15)$$

Queremos hallar la integral singular de esta ecuación diferencial; para ello derivamos la (15) parcialmente respecto de y', teniendo:

$$O = X - \tfrac{1}{2}y' + 3y'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (16)$$

Eliminando la y' entre la (15) y la (16) se tendría la ecuación de la paralela buscada en forma implícita, pero, en este caso, ello sería engorroso por requerir la solución de una ecuación algebraica completa de 4to. grado. Nos contentamos, pues, con la representación paramétrica, para lo cual reemplazamos el valor de y' por 2x, teniendo así, como para la elipse, la x como parámetro:

$$X = x - 6x(1+4x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (17)$$

$$Y = x^2 + 3(1+4x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (18)$$

Las fórmulas (17) y (18) resuelven el problema.

Existe sin embargo un método más conciso y elegante, que da fórmulas generales sencillas, método que hemos llamado de las *Funciones Inde-*

terminadas. Para ello escribamos a priori la ecuación de las curvas paralelas a la $f(x,y)=0$, trazadas a distancia k, de la siguiente manera:

$$X = x + u(x) \qquad (19)$$

$$Y = y + v(x) \qquad (20)$$

Evidentemente, la ecuación que nos dice que el punto $P(x,y)$ de la curva dada $f(x,y)=0$, dista k unidades de su homólogo $Q(X,Y)$ de la curva paralela, se escribirá:

$$u^2 + v^2 = k^2 \qquad (21)$$

Derivando ahora totalmente la ecuación implícita de la curva dada, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f.}{\partial y} y' = 0 \qquad (22)$$

Por otra parte, siendo las curvas $f(x,y)=0$ y la $(X,Y)=0$ paralelas por hipótesis, es claro que debe cumplirse para todos los pares de puntos homólogos:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

Podemos escribir, pues:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{y' + v'}{1 + u'} = y' \qquad (23)$$

de donde sale de inmediato:

$$v' = u' . y' \qquad (24)$$

Por otra parte, derivando respecto de x la (21), tenemos:

$$uu' + vv' = O \qquad (25)$$

Combinando la (24) con la (25) tendremos:

$$u + vy' = O \qquad (26)$$

Eliminamos ahora y' entre la (22) y la (26), teniendo:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{u}{v} \qquad (27)$$

Cuadrando y aplicando una simple propiedad de las proporciones, y teniendo en cuenta que $u^2 + v^2 = k^2$, queda:

$$\frac{u^2}{k^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \qquad (28)$$

De dónde:

$$u = \frac{\mp k. \frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \qquad (29)$$

$$v = \frac{\pm k. \frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \qquad (30)$$

Reemplazando estos valores en las (19) y (20), queda resuelto el problema. Las fórmulas (29) y (30) adoptan una forma particularmente sencilla, si es posible expresar la "y" de la $f(x, y) = O$ en forma explícita, esto es, si podemos escribir dicha ecuación en la forma:

$y = F(x)$ o, puesta en forma implícita aparente

$f(x, y) = y - F(x) = O$; de aquí sale respectivamente:

$\frac{\partial f}{\partial x} = - F'(x)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$; de estas dos fórmulas, sale aplicando las (19), (20), (29) y (30):

$$X = x \mp \frac{k. F'(x)}{\sqrt{1+F'^2(x)}}$$

$$Y = F(x) \pm \frac{k}{\sqrt{1+F'^2(x)}}$$