VIBRACIONES FORZADAS Y RESONANCIAS; APLICACION DE LOS VECTORES ROTANTES

Por el Profesor Dr. SEVERINO VILLATICO

Ex - profesor de la Universidad de Roma, actualmente contratado por el Instituto Tecnológico.

1 — PREMISA.

El problema expuesto en la presente monografía no es nuevo. Ya fué examinado y analizado por Signorini en su *Meccanica Superiore,* pero allí fué resuelto mediante los clásicos procedimientos de integración.

Villatico, haciendo uso de los mismos vectores rotantes introducidos por Signorini, llega a una solución de la ecuación diferencial particularmente simple y brillante que se presta a fáciles consideraciones y a interesantes deducciones técnicas. (César Cremona).

2 — ECUACION DE LAS VIBRACIONES FORZADAS.

Se tiene el fenómeno de las vibraciones forzadas cuando las vibraciones libres se ven perturbadas por causas extrañas, sobre las cuales éstas no ejercen ninguna reacción apreciable, sin necesidad siquiera que la importancia de tales causas sea notable.

En general, la causa extraña perturbatriz es debida a la acción de una fuerza periódica determinada. Esta fuerza, superponiendo su acción a una de las influencias que entran en el fenómeno de las vibraciones libres, produce las vibraciones forzadas.

Un ejemplo típico es el del diapasón que vibra en un medio que es ya asiento de una propagación de ondas sonoras.

Más precisamente, el movimiento vibratorio forzado de un punto material libre o vinculado, resulta de la pueproposición de dos movimientos vibratorios, uno amortiguado (esto es, de amplitudes decrecientes) con la autofrecuencia o autoperíodo del punto material, el otro pendlar y persistente, con el período de la fuerza extrena. Es evidente que, transcurrido un cierto tiempo, prácticamente muy breve, desde la iniciación del movimiento, la vibración amortiguada se deberá considerar omisible respecto al movimiento impuesto por la fuerza externa. Subsiste desde entonces tan sólo la vibravión forzada.

Sentado ésto, llamando P(t) una función de la sola "t", característica de la acción perturbatriz, que, siendo numéricamente definida en cada instante "t", es una función de t, el fenómeno de las vibraciones forzadas est regido, en una dimensión, por la ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden, con coeficientes constantes reales:

$$\boxed{\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = P(t)}$$

siendo $h>0$, $k>h^2$ y en que "x" es la abscisa curvilínea, "h" la constante de la resistencia pasiva o coeficiente de roce o constante de amortiguación y "k" es la constante de la solicitación conservativa o constante de restitución.

Si la P(t) se reduce a una constante, nos encontraremos entonces frente a un fenómeno de vibraciones libres; llevando, en efecto, el origen de los ejes de la posición de equilibrio natural "$x=0$" a la posición de equilibrio forzado, "$x=P/h$"), la (1) se reduce a la ecuación

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0 \qquad (2) \qquad \text{que para "}h>0\text{" y "}k>h^2\text{"}$$

regula el movimiento libre amortiguado.

Pero el caso más importante es aquél en que la P(t) sea una función periódica de "t", caso al cual, a través de un desarrollo en serie de Fourier substancialmente puede llevarse al caso más particular aún $P(t) = P.\cos vt$ siendo "P" y "v" constantes positivas. Se tiene entonces la ecuación

$$\ddot{x} + 2h\,\dot{x} + kx = P\cos vt \qquad (3)$$

siempre con las condiciones "$h>0$", "$k>h^2$".

Para integrar completamente esta ecuación (que siendo lineal, a coeficientes constantes, puede integrarse siempre mediante el uso de cuadraturas solamente) basta determinar una integral particular "i(t)", estando dada entonces la integral general por la

$$x = i(t) + R.e^{-ht}.\cos(\omega t + \partial_\circ) \qquad (4)$$

siendo "R" y "∂_o" constantes arbitrarias y "$\omega = (k-h^2)^{\frac{1}{2}}$, siendo el significado físico de "R" la amplitud de la vibración, "∂_o" la fase y "ω" la constante de frecuencia o pulsación.

La integral general (4) de la (3) no difiere de la (2) sino por el sumando variable "i(t" y la de la (2) a su vez no difiere de la de los movimientos armónicos sino por el factor variable "e^{-ht}".

3 — INTEGRACION DE LA (3) MEDIANTE LOS VECTORES RODANTES.

Busquemos si se puede satisfacer la (3) suponiendo que sea

$$i(t) = q \cos(vt—\gamma) \qquad (5)$$

en que (q) y (γ) son constantes. Veremos que la cuestión es posible de una manera única si se añaden las limitaciones:

$$q > 0 \quad , \quad 0 < \gamma < \pi$$

La cuestión se trata de un modo muy expresivo recurriendo a la noción de los vectores rotantes.

De hecho en un plano cualquiera "π" fijemos arbitrariamente el rayo positivo "x" y el sentido positivo de las anomalías, y sean: "P", el vector rotante de módulo P, velocidad angular "v", fase inicial nula; "i" el vector rotante de módulo "q", velocidad angular "v", fase inicial "γ".

Las componentes de "P" y de "i" respecto a "x" estarán dadas respectivamente, en el instante "t", por:

$$P \cos vt \quad , \quad q \cos(vt—\gamma)$$

$$\text{El vector} \quad \underline{R} = \underline{\ddot{i}} + 2h\dot{i} + \underline{ki}$$

Será, como "i", un vector rotante. También, representante con "OA" el vector "i" en el instante "t", en el mismo instante, "R" coincidirá con el vector "O C' " a lo que se llega admitiendo:

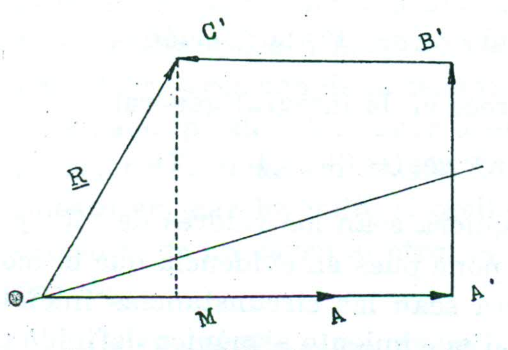

Fig. 1

1º) "OA' = k OA"

2º) "A'B' " es equipolente al vector que se deduce de "OA" haciéndolo girar en un ángulo recto en el sentido del crecimiento positivo, de las anomalías y multiplicándolo por "2hv".

3º) B'C' = — v^2OA— Trazando por C' la normal a "OA", se obtiene el triángulo rectángulo "OMC", teniéndose:

$$R = |OC'| = \sqrt{|A'B|^2 + |OA' - C'B|^2}$$
$$= \sqrt{4h^2v^2q^2 + (kq - v^2q)^2} =$$
$$= q\sqrt{4h^2v^2 + (k - v^2)^2}$$

Por otra parte, siendo

$$\text{sen} \measuredangle C'OA' = \frac{2hvq}{R} \qquad \cos \measuredangle C'OA' = \frac{q(k - v^2)}{R}$$

$$\text{será tg} \measuredangle C'OA' = \frac{2hv}{k - v^2}$$

Evidentemente "R" y "P" serán idénticos siempre y cuando sean idénticas las respectivas componentes según el eje "x", esto es, siempre y cuando la (5) dé una integral particular de la (3).

Por otra parte si se verifica la identidad de OC' con "P", habrá de ser necesariamente

$$R = P \quad , \quad C'OA' = \gamma$$

esto es

$$q = \frac{P}{\sqrt{4h^2v^2 + (k - v^2)^2}} \quad ; \quad \gamma = \text{arc tg} \frac{2hv}{k - v^2} \qquad (6)$$

Se concluye que son éstos y sólo ellos, los valores que han de darse a las constantes "q" y "γ" (bajo las limitaciones antes indicadas), cuando la (5) ha de ser una integral particular de la (3).

Con ello la integración de la (3) queda completamente efectuada por la (4).

4 — RESONANCIA.

Observamos que, siendo "$h > O$", al crecer "t", la función

$R.e^{-ht}.\cos(\omega t + \partial_o)$, que aparece en la integral general

$$x = q\cos(vt - \gamma) + R.e^{-ht}.\cos(\omega t + \partial_o) \qquad 7)$$

de la ecuación diferencial (3), cualesquiera sean los valores de "R" y de "∂_o", tiende rápidamente a O. La (7) pone pues en evidencia que el movimiento vibratorio forzado, cualesquiera sean las circunstancias iniciales, tiende rápidamente a confundirse con el movimiento armónico definido por $x = q\cos(vt - \gamma)$, movimiento éste que llamaremos *movimiento residual.*

Pensando fijados "k", "h", "P" y variable "v", se saca primero de la (6) que la amplitud del movimiento residual adquiere el valor máximo

$$q_{max} = \frac{P}{2\ h\ \omega} \qquad (8)$$

cuando sea $v^2 = k - 2h^2 = \omega^2 - h^2$, habiendo fijado "$\omega = \sqrt{k - h^2}$", para cuyo valor es "$k = \omega^2 + h^2$".

De hecho, sustituyendo en $q = \dfrac{P}{\sqrt{4h^2v^2 + k - v^2)^2}}$ los valores

"$v^2 = \omega^2 - h^2$" y "$k = \omega^2 + h^2$", se tiene:

$$q = \frac{P}{\sqrt{4h^2(\omega^2 - h^2) + (\omega^2 + h^2 - \omega^2 + h^2)^2}} = \frac{P}{\sqrt{4h^2\omega^2}} = \frac{P}{2\ h\ \omega}$$

De la (8) se deduce entre tanto que, cuando la resistencia pasiva "h" es pequeña en comparación con la acción de restitución "k", la amplitud del movimiento residual se agudiza extremadamente si la acción perturbatriz, sin cambiar su intensidad eficaz (caracterizada por la constante "P"), adquiere una frecuencia poco inferior a la autofrecuencia de las vibraciones libres, o bien un período un poco mayor (siendo recíprocos el período y la frecuencia) al de las vibraciones libres. A medida que se atenúa la resistencia pasiva, la amplitud del movimiento residual crece indefinidamente.

Este es un caso particular de los fenómenos de resonancia. El estudio de tales fenómenos, además de efectuarse en la Mecánica, se impone en los campos más variados de la Física; estos fenómenos, en efecto son susceptibles de aplicaciones utilísimas, por cuanto se prestan a hacer perceptibles oscilaciones demasiado débiles (resonadores acústicos, aparatos de emisión y recepción de la telegrafía inhalámbrica, etc.) mientras que, por otra parte pueden dar lugar a oscilaciones tan amplias que resulten peligrosas en extremo (vibración de los puentes metálicos al paso de un regimiento en marcha militar, oscilación de los vagones ferroviarios al paso oscilante de un carril al otro, la vibración de las piezas de alguna máquina, etc.).

La (8) se denomina *Amplitud de Resonancia.*

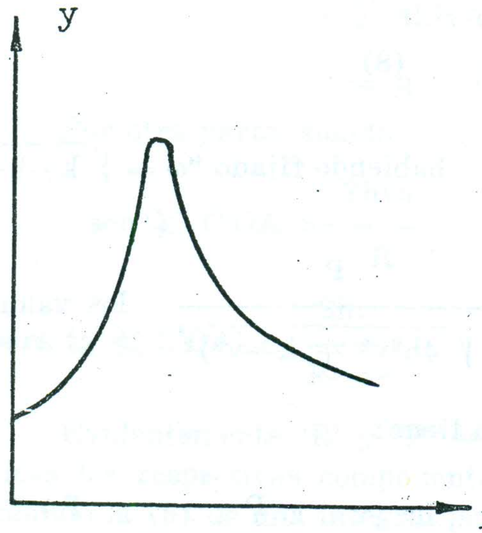

Fig. 2

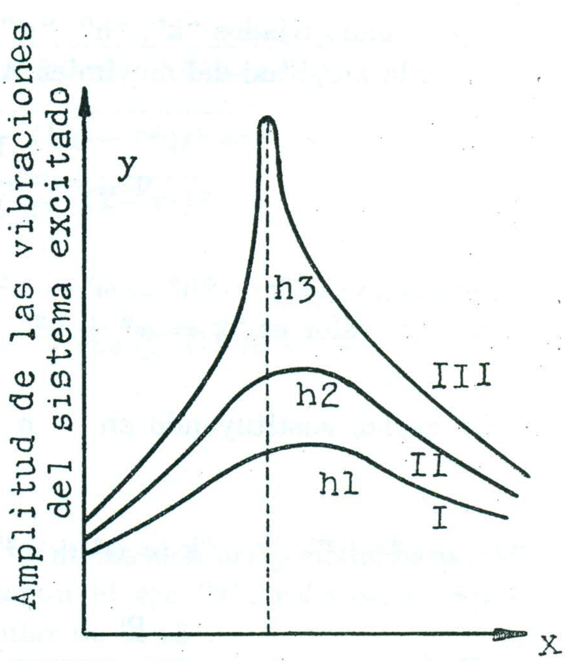

Fig. 3

Si se supone "h²" despreciable frente a "k", la amplitud de resonancia presenta un máximo agudísimo.

Más arriba se han construído algunas curvas de resonancia para valores distintos de la fuerza de amortiguamiento, cuyo coeficiente llamamos "h"; las amplitudes crecen de la curva I a la III.

Observamos aún que con el crecimiento de la amortiguación, al mismo tiempo que disminuye la amplitud de resonancia, aumento en cambio su extensión.