MONOGRAFIA SOBRE LAS PERMUTACIONES CICLICAS A PERIODO PREESTABLECIDO

Por el Profesor Ingeniero Dr. CESAR CREMONA

Ex-profesor de la Universidad de Roma, actualmente contratado por el Instituto Tecnológico.

1 — PREMISA.

En muchas aplicaciones de la técnica de las medidas, en los instrumentos o aparatos registradores, contadores, de control, selectores, etc., ya sea a escala circular o rectilínea, ocurre con frecuencia la necesidad de tener que adoptar *correspondencias diversas especiales* entre dos *sucesiones finitas numerales* "n" y "p", ligadas mediante vínculos singulares.

La solución de tales problemas, particulares del cálculo combinatorio, no se halla en los tratados de matemáticas y se presenta generalmente como laboriosa y compleja.

En esta nota se desea exponer una solución, para un caso muy frecuente, la cual por su sencillez y originalidad, puede ser de una comodidad tal para el investigador como para hacerle preferir un dispositivo mecánico a otro por la facilidad de las medidas o del control, especialmente si el aparato ha de ser registrador.

El matemático en cambio, hallará en esta nota una expresión simple más, de una aplicación del cálculo combinatorio.

2 — PLANTEO DEL PROBLEMA.

Tenemos un número "m" de objetos, de la clase "n", ordenados lineal y sucesivamente uno a continuación del otro en la permutación fundamental siguiente:

$$n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \ldots\ldots\ldots n_{m-1}, n_m \quad (1)$$

y se empiezan a colocar en un número "k" de casilleros "p", también ordenados entre si según la permutación:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots p_{k-1}, p_k \quad (2)$$

poniendo *inicialmente* el objeto "n_1" en la casilla "p_1"; el "n_2" en la casilla "p_2", etc., hasta agotar la serie de los objetos "n" o de los casilleros "p", recomenzando luego el ciclo colocando nuevamente la serie de los "m" objetos, siempre ordenada y sucesivamente, primero en los lugares dejados en blanco y luego recomenzando en la primera casilla y así sucesivamente, tantas veces como sea necesario hasta que el úlimo objeto "n_m" caiga en él último casillero "p_k".

Nos proponemos determinar:

A. — ¿Cuántas permutaciones han sido necesarias?

B. — ¿Cuántas veces y en qué casilleros "p" un objeto genérico "n" haya encontrado lugar?

C. — ¿Cuántos y cuáles objetos "n" han encontrado ubicación en un puesto genérico "p"?

3 — DETERMINACION DEL NUMERO "N" DE PERMUTACIONES NECESARIAS.

Ocurrirá:

a) Si es

$$\text{"m"} = k \tag{3}$$

los "m" objetos ocuparán ordenadamente los "k" casilleros y la operación se habrá performado.

b) Si es

$$\text{"m"} < k \tag{4}$$

el objeto "n_m" caerá en el casillero "p_m" y quedarán aún (k—m) lugares en blanco. Se continuará por consiguiente la aplicación recomenzando a poner el objeto "n_1" en la casilla "p_{m+1}"; el "n_2" en la "p_{m+2}", etc. Si, procediendo de tal modo se agota la serie de los objetos dados, se procederá análogamente con una tercera, cuarta, etc. series de los mismos "m" objetos ordenados siempre según la permutación fundamental, hasta que el objeto "n_m" caiga —por vez primera—, en la casilla "p_k".

Si es

$$m > k \tag{5}$$

el objeto "n_k" caerá en el casillero "p_k" y quedarán aún (m—k) objetos. Se continuará pues la aplicación, poniendo seguidamente el objeto "n_{k+1}" en el casillero "p_1", el "n_{k+2}" en el casillero "p_2", etcétera.

Si, procediendo de este modo, se agota la serie de los objetos dados, se procederá análogamente con una segunda, tercera, etc., series de los mismos "m" objetos ordenados siempre según la permutación fundamental, hasta que el objeto "n_m" caiga en la casilla "p_k".

Es evidente que en el caso a), siendo único el modo de aplicar los "m" objetos en los "k" casilleros, el problema está resuelto para

$$N = 1 \tag{6}$$

Es por otra parte evidente que el objeto "n_m", en el caso b), caerá o no en el último casillero "p_k" según que "k" sea o no divisible por "m"; esto es, llamando $M_{m,k} = M$ al máximo común divisor entre "m" y "k", según que "M" sea igual o distinto del número menor "m"; si $M = m$, el valor de N estará evidentemente dado por

$$N = \frac{k}{m} \tag{7}$$

y, por ser $M = m$, podrá escribirse

$$N = \frac{k}{M} \tag{8}$$

Esta es la fórmula general, puesto que si llamamos "x" al número mínimo de veces que hay que recorrer todos los casilleros (número de objetos ocupantes de cada casillero), es claro que

$$x.k = N.m$$

$$\frac{N}{x} = \frac{k}{m}$$

para hallar N y x mínimos, bastará simplificar, hasta hacerla irreductible, la fracción $\frac{k}{m}$, lo que, como se sabe, se logra dividiendo el numerador y el denominador por el máximo común divisor de ambos; de esta manera tendremos que $N = \frac{k}{M}$ y que $x = \frac{m}{M}$ como se afirmó.

Es aún evidente que podrá hacerse un razonamiento análogo para el caso c) y naturalmetne es obvio que la (6) y la (7) no son sino sendos casos particulares de la (8).

4 — OBSERVACION.

De lo que precede, resulta aparente que el problema examinado es simétrico respecto de las "m" y de las "k" y por lo tanto puede transformarse en correspondencias diversas entre dos sucesiones finitas, numerables, dispuestas con aquella ley especial de formación. Sin alterar lo substancial, se puede pues, considerar que sea siempre

$$m < k$$

esto es, de ambos números, "m" y "k", se considera primero su orden de magnitud y luego se procede en las fórmulas resolutivas.

5 — DEFINICION DEL SIMBOLO [a:b].

Definimos con el símbolo

$$[a:b] \tag{9}$$

el valor numérico del resto obtenido en la división del número *a* por el número *b;* cuando *a* sea divisible por *b* será siempre [a:b] = b

$$[a:b] \leq b \tag{10}$$

6 — DETERMINACION DE LOS CASILLEROS POR UN OBJETO GENERICO (En orden creciente).

Un objeto genérico "n_r" de la (1), siendo naturalmente $r \leq m$, ocupará en total $\frac{k}{M}$ casilleros distintos, puesto que como se ha visto anteriormente, hay en total $\frac{k}{M}$ permutaciones, y a cada una de ellas — que comprende todos los elementos del 1 al m — corresponden un elemento "n_r".

Estos casilleros que son, en el orden creciente, los indicados por la columna siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1ra. casilla en que aparece el elemento "}n_r\text{" es la} & p_{[r:M]} \\ \text{2da. ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,} & p_{[r:M]+M} \\ \text{3ra. ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,} & p_{[r:M]+2M} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \left(\frac{k}{M}\right)^{a} \text{ ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,} & p_{[r:M]+\left(\frac{k}{M}-1\right)M} \end{array}\right\} \tag{11}$$

asumiendo —en virtud de la (8)— el $\left(\frac{k}{M}\right)$ ésimo, casillero la expresión más simple

$$p_{[r:M]+(N-1)M} \tag{11 bis}$$

Veamos cómo se llega a establecer esta fórmula razonadamente:

Para ello tengamos en cuenta primeramente que el casillero ocupado por el elemento "n_r" de la permutación "z" (siendo z un entero cualquiera comprendido entre 1 y k/M inclusive) se obtendrá como el resto por defecto de la división de $[r+(z-1)m]$ por k, tomándose, por no existir casillero 0, igual al divisor k dicho resto cuando la división citada sea exacta. Para ver gráficamente dicho resultado, basta observar el esquema siguiente:

x grupos de casilleros

1ª Fila: $\underbrace{(1,2,3,4,..k-1,k)}_{\text{1er. grupo}}$ $\underbrace{(1,2,3,4,..k-1,k)}_{\text{2do. grupo}}$... $\underbrace{(1,2,3,4,..k-1,k)}_{\text{3er. grupo}}$... $\underbrace{(1,2,3,4,..k-1,k)}_{\text{grupo x}}$

N permutaciones

2ª Fila: $\underbrace{(1,2,3,\dots r,\dots m)}_{\text{1ra. permutación}}$ $\underbrace{(1,2,3,\dots r,\dots m)}_{\text{2da. permutación}}$... $\underbrace{(1,2,3,\dots r,\dots m)}_{\text{permutación z}}$... $\underbrace{(1,2,3,\dots r,\dots m)}_{\text{permutación N}}$

Como puede verse, el número total de individuos de cada una de las dos filas anteriores, es igual a $k.x=N.m$. Además, está claro que el elemento de la permutación z, designado por "n_r", es el número ordinal $r+(z-1)m$ de la segunda fila. Resulta por fin perfectamente comprensible que, si dividimos este número por k, el cociente nos dará el *número de grupos de casilleros* abarcados (en el siguiente cae el elemento n_r) y el resto por defecto de dicha división dará precisamente el casillero, perteneciente al *grupo de casilleros* indicado por el cociente más uno, en que quedará ubicado dicho elemento. Queremos demostrar que el casillero de menor subíndice (no importa el *grupo* a que pertenezca) ocupado por el elemento "n_r" (no importa de qué permutación sea) es el de subíndice igual al resto de dividir el número r por M, siendo, como se vió antes, M el máximo común divisor entre "k" y "m" y tomándose dicho resto por defecto, si la división no es exacta, e igual al divisor si lo es.

Llamando $c(z)$ al cociente (función de z) y $R(z)$ al resto por defecto de la división

$$\frac{r+(z-1)m}{k}$$

resultará:

$$r+(z-1)m = c(z).k+R(z)$$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por el máximo común divisor M de m y de k, y llamando como antes a los cocientes de m/M y k/M respectivamente *x* y *N*, tendremos:

$$\frac{r}{M}+(z-1).x=c(z).N+\frac{R(z)}{M}$$

Y, si llamamos q el cociente y £ el resto por defecto de dividir r por M, tendremos por otra parte que:

$$r = q.M + £,$$

igualdad que substituída en la anterior nos da:

$$\frac{R(z)-£}{M} = q+(z-1).x-c(z).N \qquad \text{(F)}$$

y se ve claramente, que, siendo *enteros* los números q, z, x, c(z) y N, por su significado mismo, el valor mínimo de R(z) se obtendrá cuando dichos enteros sean tales que el segundo miembro se anule, en cuyo caso R(z)=£, esto es, de acuerdo a la notación definida en (5), igual a [r:M], como se deseaba demostrar. Además, resulta obvio que si estos números son tales que nos den sucesivamente como valor del segundo miembro de la (F), los valores 1, 2, 3, . . . (N—1), los valores de R(z) sucesivos, dispuestos en crden creciente, serán:

$$R(z) = £, £+M, £+2M, \ldots, £+(N-1)M.$$

Falta probar que el segundo miembro de la (F) no puede ser nunca negativo y que, en efecto, su menor valor es cero. Para ello definimos dos funciones de *z*, O(z) y f(z) tales que sean el cociente y el resto por defecto respectivamente de dividir R(z) por M. De esta manera tendremos:

$$R(z)=O(z).M+f(z) \qquad \text{(G)}$$

Reemplazando en la (F) tendremos:

$$\frac{O(z)M+f(z)-£}{M} = q+(z-1).x-c(z).N \qquad \text{(H)}$$

Como el segundo miembro de la (H) debe ser entero, forzosamente, para cualquier valor de z, y por ser f(z) y £ siempre menores que M, siendo como lo son restos por defecto de divisiones de divisor M, ha de ser f(z)—£ = 0, esto es f(z) = £ es constante.

De modo que el segundo miembro de la (H) se reduce a O(z), esto es, puede a lo sumo valer 0, o sino ser un entero positivo, como lo requiere el significado de O(z) que surge de la (G).

7 — DETERMINACION DE LOS OBJETOS QUE OCUPAN UN CASILLERO GENERICO.

De lo que precede se deriva inmediatamente que, si se quiere determinar, durante las "N" permutaciones cíclicas, cuáles elementos han ocupado en total sucesivamente un casillero genérico p_s, entendiéndose que

$$s \leq k$$

basta considerar la relación $\frac{m}{M}$, esto es, en la casilla "p_s" vienen a estar en total m/M objetos diferentes (y no más), dados en el orden de sus respectivos subíndice crecientes, por las fórmulas

$$n_{[s:M]};\ n_{[s:M]+M};\ n_{[s:M]+2M};\ \ldots\ldots\ n_{[s:M]+\left(\frac{m}{M}-1\right)M} \qquad (12)$$

teniéndose como expresión del m/M ésimo elemento —que es el de mayor subíndice de la casilla "p_s"— la siguiente:

$$n_{[s:M]+m-M} \qquad (12\ \text{bis})$$

La demostración, que sería enteramente análoga a la del caso anterior, puede referirse a la de aquél por el simple cambio de casilleros en elementos y viceversa, pues como se ha dicho anteriormente, el problema es simétrico, esto es, pueden permutarse casilleros por elementos y viceversa sin alteración de la substancia.

8 — OBSERVACIONES.

De cuanto precede, se deduce lo siguiente:

a) *Si los números* m *y* k *son primos entre si* (M=1) *en cada casillero caben todos los elementos y cada elemento ocupa todos los casilleros.*

b) *Si los números* "m" *y* "q" *son primos entre si* (M=1) *y sea* m:K=1 *en cada casillero caben todos los elementos y cada objeto ocupa todos los casilleros; en cada casillero caben todos los elementos en el orden cíclico de su permutación y además cada elemento llega a ocupar cada uno de los casilleros.*

Por ejemplo, sea k=16 y m=5; M será igual a 1, por ser k y m primos entre si.

Casillero Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1
	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2
	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3
	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4
	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5

c) *El número total de los objetos* que pueden figurar en un cuadro recapitulativo *es —si "m" y "k" son primos entre si—, igual al* *mínimo común múltiplo mk de ambos números; si no son primos entre si, hay que dividir su producto mk por el máximo común divisor,* es decir será

$$\frac{k \cdot m}{M}$$

Esto sale de inmediato, teniendo en cuenta que el número de dichos objetos o elementos es igual al producto del número de casilleros por el de filas; hemos visto antes que el número de filas vale $\frac{m}{M}$, de modo que en el cuadro recapitulativo figurarán en total $\frac{k \cdot m}{M}$ elementos como se afirmó.

d) *Si el máximo común divisor es igual al menor de ambos números "m" y "k",* se tiene el caso más sencillo en el cual, *si es "$m>k$" (y por tanto es $M = k$), cada casillero contiene $\frac{m}{k}$ objetos y cada elemento ocupa un solo casillero; si es "$m<k$", (y por lo tanto es $M = m$"), cada elemento ocupa "k/m" casilleros y cada casillero albergará un solo elemento.*

e) *Si es "$m<k$" y es "$1<M<m$", el número de las permutaciones es siempre $N = \frac{k}{M}$ y cada objeto ocupa "k/M" casilleros diferentes, cabiendo en cada casillero "m/M" elementos pertenecientes a una alícuota de la permutación.*

f) *Si es "$m<k$" y es "$M = 2$", los elementos se distinguen alternativamente en impares y pares, cabiendo en los casilleros impares, los objetos de orden impar y en los pares, los de orden par.*

Por ejemplo:

Casillero Nº	1	2	3	4	5	6	7	8
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_1	n_2
	n_3	n_4	n_5	n_6	n_1	n_2	n_3	n_4
	n_5	n_6	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6

y así sucesivamente.

9 — CONCLUSION.

Es posible pues, expresar el siguiente enunciado: *Si se desean colocar "n" elementos ordenados linealmente, tantas veces sucesivas en "k" casilleros diferentes, asimismo ordenados linealmente, hasta que el último de la serie de los elementos, caiga en el último casillero, es posible preveer el número de permutaciones necesarias* [fórmula (8)]; *cuáles casilleros serán ocupados, durante las permutaciones por un elemento determinado* [fórmulas (11) y (11 bis)] *y cuáles elementos ocuparán determinados casilleros* [fórmulas (12) y (12 bis)] *y viceversa: Si se desean colocar objetos diferentes, ordenados linealmente, un número determinado de veces sucesivamente en casilleros distintos, ordenados entre si linealmente, con permutaciones cíclicas de modo que el último de la serie de los objetos caiga en el último de la serie de los casilleros, es posible elegir el número "p" de los casilleros y el "n" de los objetos en forma tal que el número de las permutaciones sea el requerido* [fórmula (8)], *que determinados casilleros se vean ocupados durante las permutaciones, por un objeto determinado* [fórmulas (11) y (11 bis)] *y que determinados objetos ocupen determinados casilleros* [fórmulas (12) y (12 bis)].

En lo que precede el estudioso y el investigador hallarán representaciones gráficas sugestivas e interesantes simplificaciones en sus mecanismos; el matemático una nueva aplicación del cálculo combinatorio.