TEORIA DE LA PROPULSION A EMISION EFECTUADA SIN EL AUXILIO DEL OXIGENO ATMOSFERICO, ADMITIENDO LAS SIGUIENTES HIPOTESIS IDEALES DE CALCULO

Por el Prof. contratado del Inst. Tecn. del Sur Ing. Quím. W. E. DAUB

I) Ausencia de campos de fuerza y vacío absoluto circundando al cohete.

II) V_E = Velocidad de exhausión total = constante, llamando así a la velocidad conque los gases de exhausión y el cohete se separan en el espacio; admitimos la constancia de esta velocidad en el tiempo.

III) Que la emisión periódica y discontinua sea uniforme, de tal modo que la fracción de masa de gases de exhausión emitida en cada período equivalga a una fracción propia $\frac{1}{r}$ de la masa actual, siendo ésta una función decreciente del tiempo y que incluye en cada instante la masa del proyectil-cohete, la del combustible existente en ese instante y del comburente. Matemáticamente escribiremos:

$$\frac{\triangle m_k}{m_k} = \frac{1}{r} \text{ siendo } r > 1$$

En estas condiciones nos proponemos hallar:

a) La velocidad del cohete al finalizar la enésima emisión de partículas de masas discretas de exhausión.

b) La relación de masas, esto es, la masa inicial del conjunto cohete + comburente, dividida por la masa restante después de la enésima emisión.

c) La relación de masa cuando el cohete alcanza la velocidad total de exhausión para una fracción $\frac{1}{r}$ dada, y, finalmente;

d) Variación de la relación de masas del párrafo c) anterior en función de r, probando analíticamente que dicha relación de masas disminuye al aumentar r y calculando el mínimo asintótico así como el ahorro de combustible y de comburente que se obtiene cuando en igualdad de las demás condiciones se toman dos $\underline{r}$ distintos, para el caso del $\underline{r}$ mayor.

a)

Llamaremos:

V_k la velocidad actual de los gases emitidos, considerando para simplificar la notación, su módulo solamente.

v_k la velocidad actual del cohete, considerando también el módulo solamente de la misma.

$\triangle m_k$ la masa de las partículas emitidas en la k-ésima emisión.

m_k la masa actual del cohete al finalizar la k-ésima emisión.

Tenemos, por la hipótesis II):

$$V_k + v_k = V_E \tag{1}$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k + \sum_{k=1}^{n} v_k = n\,V_E \tag{2}$$

Por el principio de la conservación de la cantidad de movimiento, se tiene:

$$V_1 . \triangle m_k = m_k . v_1 \tag{3}$$

De III) y (3):

$$V_1 = r . v_1 \tag{4}$$

Por el principio de la superposición de las velocidades según la mecánica clásica (no relativista):

$$\begin{aligned}
V_1 &= V_1 \\
V_2 &= V_1 - v_1 \\
V_3 &= V_1 - v_2 \\
V_4 &= V_1 - v_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_k &= V_1 - v_{k-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_n &= V_1 - v_{n-1}
\end{aligned}$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = nV_1 - \sum_{k=1}^{n-1} v_k \tag{5}$$

Restando ahora la (5) de la (2), queda:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = n(V_E - V_1) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

esto es:

$$v_n = n(V_E - V_1) \tag{6}$$

Por otra parte, de la (1) y de la (4):

$$V_1 = \frac{r \cdot V_E}{r+1} \tag{7}$$

y de (6) y (7):

$$v_n = \frac{n \cdot V_E}{r+1} \tag{8}$$

b) Para deducir la relación de masas, aplicamos la Ley de Lavoisier y la hipótesis III), teniendo, como es obvio:

$$m_o = \triangle m_1 + m_1 = \frac{m_1}{r} + m_1 = m_1 \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

$$m_1 = \triangle m_2 + m_2 = \frac{m_2}{r} + m_2 = m_2 \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

$$m_k = \triangle m_{k+1} + m_{k+1} = \frac{m_{k+1}}{r} + m_{k+1} = m_{k+1} \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

$$m_{n-1} = \triangle m_n + m_n = \frac{m_n}{r} + m_n = m_n \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

de dónde, multiplicando los primeros y últimos miembros ordenadamente:

$$\prod_{k=o}^{n-1} m_k = \prod_{k=1}^{n} m_k \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

relación que, simplificada da

$$m_o = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^n \cdot m_n$$

de dónde tenemos la relación de masas buscada:

$$\frac{m_o}{m_n} = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^n \tag{9}$$

c) Se alcanzará la velocidad total de exhausión cuando sea $v_n = V_E$ (10). De las (8) y (10) tal cosa acontecerá siempre y cuando se tenga

$$n = r + 1 \tag{11}$$

aplicando ahora la (9) y la (11), tendremos que la relación de masas valdrá en tal caso

$$\left[\frac{m_o}{m_n}\right]_E = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{1+r} \qquad (12)$$

que nos dice que dicha relación es sólo función de r e indicando E en este caso solamente el hecho de que nos referimos a la particular relación de masas que corresponde a la (10).

d) Vamos a probar ahora que la (12) es una función decreciente de r, en el intervalo real que nos interesa y que se define por la desigualdad

$$r > 1$$

Para ello basta probar que la derivada de dicha función respecto de r es negativa en dicho intervalo; llamando al primer miembro de la (12) simplemente f(r) y derivando logarítmicamente, queda:

$$\ln f(r) = (1+r)\ln\left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{f'}{f} = \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) + (1+r)\frac{-\dfrac{1}{r^2}}{1 + \dfrac{1}{r}}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}$$

esto es:

$$f' = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{1+r} \cdot \left[\ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\right] \qquad (13)$$

El primer factor del segundo miembro de la (13) es siempre positivo en el intervalo real dado; falta probar que el segundo factor es negativo en dicho intervalo; para ello hagamos la substitución de variables

$$\ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) = z \text{ de dónde}$$

$$\frac{1}{r} = e^z - 1$$

por consiguiente tenemos que estudiar el signo de la función

$$F(z) = z + 1 - e^z \text{ al disminuir z desde } \ln 2 \text{ hasta } 0.$$

Para $z = \ln 2$, es $F(z) = \ln 2 - 1 < 0$; por otra parte para $z = 0$, $F(0) = 1 - 1 = 0$; como la función es monótona y alcanza su valor máximo para $z = 0$, en dicho intervalo, por ser

$$F'(0) = 1 - e^0 = 0$$
$$F''(0) = -1$$

se tiene que la $F(z)$ es siempre negativa en dicho intervalo, lo que prueba que $f'(r)$ es decreciente. Alcanza asintóticamente su mínimo para $\underline{r} \to \infty$ valiendo dicho mínimo el número "e", base de los logaritmos neperianos, que es aproximadamente (en exceso) $= 2{,}72$.

Este límite sale de inmediato de la (12) teniendo en cuenta que

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{1+r} = \left(1 + \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r$$

y que, para r tendiendo a más infinito, el segundo factor del segundo miembro vale el número "e", —pa definición del mismo como límite y prueba de su acotación y que el primer factor del segundo miembro vale 1 para dicha variación de r, en el límite.

Veamos ahora el ahorro de combustible y comburante que se obtiene cuando se disparan dos cohetes de iguales masas iniciales y en igualdad de condiciones, alcanzando con ambos la misma velocidad final V_E, pero emitiendo partículas de masas discretas de distinto tamaño; de acuerdo a nuestra notación, las de mayor tamaño corresponderán al $\underline{r}$ menor y las de mayor tamaño al r mayor. Los designaremos respectivamente con $\underline{r}$ y $\underline{R}$. Correspondiendo la menor relación de masas final al R mayor, tendremos para ese caso el menor consumo de combustible + comburente. El ahorro de ambos valdrá, pues

$$A = m_o - m_n - (m_o - M_n) = M_n - m_n$$
$$= m_o \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{R}\right)^{R+1}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{r}\right)^{1+r}} \right]$$

esto es:

$$A = m_o \left[\left(\frac{R}{1+R}\right)^{1+R} - \left(\frac{r}{1+r}\right)^{1+r} \right] \qquad (14)$$

Si por ejemplo comparamos la emisión por cuartas partes y la emisión por mitades, que corresponden a los valores particulares $R = 3$ y $r = 1$ respectivamente, se tendrá el apreciable ahorro de un

$$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right].100 = \frac{256}{1700} \cong 6{,}64\ \%$$

de combustible + comburente, ejemplo que ilustra que se deben utilizar combustibles que den gases de exhausión del mínimo tamaño y densidad, con una máxima velocidad V_E total de exhausión para lograr el máximo efecto con la mayor economía.