CUARTICAS BICIRCULARES

Por el, Profesor contratado Dr. SEVERINO VILLATICO

INTRODUCCION

Mientras que el estudio y la clasificación de las curvas de segundo y tercer orden se ha realizado completamente, el estudio de las cuárticas presenta muchas dificultades puesto que si no se conocen el número y la especie de las singularidades (el número de puntos dobles), la clasificación mediante el sistema de Plücker llevaría a la consideración del sistema:

$$\begin{cases} f = O \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = O \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = O \end{cases}$$

de tres ecuaciones con dos incógnitas en que habría que hallar, si es que existieran, las soluciones comunes, que podrán hallarse en un número máximo de tres.

Si en vez se conocen los puntos dobles es fácil encontrar su especie y por tanto clasificar la cuártica en base a las fórmulas de Plücker.

Por ejemplo: si los puntos dobles son tres, no sólo es posible clasificar la curva conociendo la especie a que éstos pertenecen, sino que es también posible individualizar las otras singularidades (puntos de inflexión, puntos cuspidales), expresando las coordenadas de la curva en función de un parámetro.

Si la cuártica es bicircular habría que introducir las funciones elípticas.

Consideraré en esta monografía la generación de las cuárticas bicirculares así como su clasificación.

La ecuación cartesiana de una cuártica bicircular es de la forma:

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 + (\alpha x + \beta y)\ (x^2 + y^2)\ + a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

Si se lleva el origen de los ejes al punto $\left(-\frac{\alpha}{4}; -\frac{\beta}{4}\right)$ se transforma en:

$$(x^2 + y^2)^2 + a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

El punto $\left(-\frac{\alpha}{4}; -\frac{\beta}{4}\right)$ se denomina punto fundamental de la cuártica y goza de la propiedad de ser equidistante de los puntos de intersección de la cuártica con una recta que pase por el mismo.

En efecto, pasando a coordenadas polares la (1) se transforma en:

$$(1) \quad \rho^4 + \rho^2\ (a_{11}\cos^2\omega + a_{22}\mathrm{sen}^2\ \omega + 2a_{12}\mathrm{sen}\ \omega\cos\omega) + \rho\,(2a_{13}\cos\omega + 2a_{23}\mathrm{sen}\ \omega) + a_{33} = O$$

Llamando M_1, M_2, M_3 y M_4 las intersecciones de la curva con una recta que pasa por el punto fundamental, se tiene siempre:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 = O$$

en que, si M_{ih} es el punto medio del segmento $M_i\ M_h$ se podrá escribir:

$$OM_{ih} + OM_{jk} = O$$

en que i, h, j y k constituyen una permutación de 1, 2, 3 y 4.

Por lo tanto O es el punto medio del segmento $M_{ih}\,M_{jk}$.

Las cuárticas bicirculares pueden obtenerse:

1) Por proyección estereográfica de la intersección de una esfera con un cono.

2) Como envolvente de un haz de circunferencias ortogonales respecto a una circunferencia fija y teniendo sus centros sobre una cónica.

3 Por la llamada inversión circular de una cónica.

4) Como lugar de las intersecciones de dos haces de circunferencias proyectivas.

Capítulo I

Las cuárticas bicirculares obtenidas por proyección estereográfica de una C_4 jibosa.

§ 1

Sea $\xi^2+\eta^2+\varsigma^2=1$ la ecuación de la esfera referida a una terna de ejes coordenados teniendo el origen en el centro de la esfera.

Proyectamos desde el punto (0, 0, 1) la esfera sobre el plano $Z = -1$.

A cada punto de la esfera corresponderá un punto del plano, con la excepción del punto (0, 0, 1) al que corresponde la recta impropia del plano $Z = -1$ y por lo tanto, a cada línea esférica, que no pase por el centro de proyección, corresponderá siempre una línea desprovista de puntos impropios en el plano. Entre las coordenadas ξ, η, ζ de un punto de la esfera y las coordenadas x, y, —1 de un punto del plano subsistirá una relación cuadrática del tipo:

$$\xi = \frac{4y}{x^2+y^2+4}; \quad \eta = \frac{4x}{x^2+y^2+4}; \quad \zeta = \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4};$$

En efecto, referamos los puntos de la esfera a un sistema de coordenadas cilíndricas y sean Q y Q' dos puntos correspondientes para los cuales se tendrá:

$$Q \equiv (z', \rho', \varphi,) \qquad Q \equiv (z, \rho, \varphi)$$

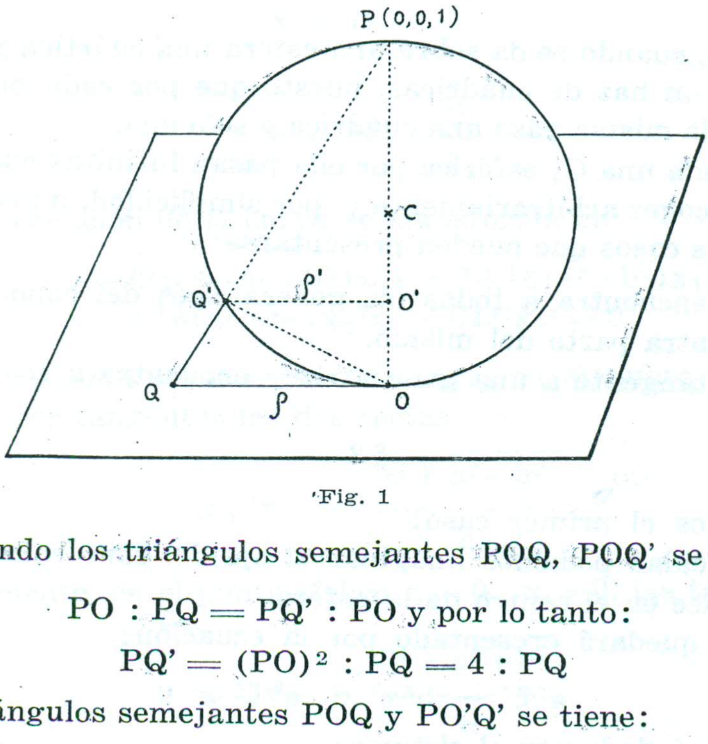

Fig. 1

Considerando los triángulos semejantes POQ, POQ' se tiene:

$$PO : PQ = PQ' : PO \text{ y por lo tanto:}$$

$$PQ' = (PO)^2 : PQ = 4 : PQ$$

De los triángulos semejantes POQ y PO'Q' se tiene:

$$PQ' : PQ = \rho' : \rho \qquad ; PQ' = \frac{\rho'}{\rho} PQ$$

Pero $PQ = \sqrt{\rho^2 + 4}$ y por lo tanto:

$$\frac{4}{\sqrt{\rho^2+4}} = \frac{\rho'}{\rho}\sqrt{\rho^2+4}\,; \; 4\rho = \rho'(\rho^2+4)$$

y por fin:

$$\rho' = \frac{4\rho}{\rho^2 + 4}$$

De los triángulos semejantes POQ, PO'Q' se tiene:

$$O'P : 2 = \rho' : \rho \qquad O'P = \frac{2\rho'}{\rho}\text{; además}$$

$$C\,O' = C\,P - O'P = 1 - \frac{2\rho'}{\rho} = \frac{\rho^2 - 4}{\rho^2 + 4};\; Q' \equiv \left(\frac{\rho^2 - 4}{\rho^2 + 4};\; \frac{4\rho}{\rho^2 + 4},\; \varphi\right)$$

puesto que:

$$\rho^2 = x^2 + y^2;\quad x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

sustituyendo más arriba se tienen las fórmulas precedentes.

§ 2

Ahora bien, cuando se da sobre una esfera una cuártica jibosa C_4 ésta individualizará un haz de cuádricas, puesto que por cada punto fuera de la misma y por la misma pasa una cuádrica y sólo una.

Así que, dada una C_4 esférica por ella pasan infinitas cuádricas de las que podemos escoger arbitrariamente y, por simplicidad, un cono del haz.

Tres son los casos que pueden presentarse:

1) La esfera encuentra a todas las generatrices del cono.
2) Sólo encuentra parte del mismo.
3) O bien es tangente a una generatriz y encuentra a todas las demás.

§ 3

Examinemos el primer caso:

Por simplicidad podemos imaginar el eje del cono coincidente con el eje η y el vértice en el centro de la esfera.

Este cono quedará eresentado por la ecuación:

$$a^2\xi^2 - b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 0$$

La C_4 estará dada por el sistema:

$$C_4 \equiv \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \\ a^2\xi^2 - b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 0 \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas de la proyección estereográfica, se tiene:

$$(x^2+y^2)^2 - 8(x^2+y^2) + 16 - \frac{a^2}{c^2}x^2 - 16 - \frac{b^2}{c^2}y^2 + 16 = 0$$

Se obtiene pues una cuártica bicircular que tiene el punto fundamental en el origen de los ejes.

Es simétrica respecto a los dos ejes coordenados, puesto que si es (x', y') un punto de la misma, será también punto de la misma el que tiene las coordenadas (—x', —y').

Las intersecciones con el eje de las X están dadas por la ecuación:

$$c^2x^4 - 2(4c^2 - 8a^2)x^2 + 16c^2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son siempre imaginarias.

Las intersecciones con el eje de las Y están dadas por la ecuación:

$$c^2 y^4 - 2(4c^2 + 8b^2)y^2 + 16c^2 = 0$$

siendo sus raíces siempre reales.

La curva consta, pues, de dos óvalos, externo el uno respecto del otro.

Para estudiar el comportamiento en el infinito, escribamos:

$$x + iy = \frac{x_1}{x_0}$$

$$x - iy = \frac{x_2}{x_0}$$

y entonces la ecuación de la curva se transforma en:

$$4c^2x_1^2x_2^2 - 32(c^2 - a^2 + b^2)x_1x_2x_0^2 + 16(a^2+b^2)x_1^2x_0^2 +$$
$$+ 16(a^2+b^2)x_2^2x_0^2 + 64c^2x_0^4 = 0$$

De esta ecuación se saca que la curva, en el punto cíclico $x_1 = 0$ y $x_0 = 0$ tiene por tangentes las dos rectas

$$x + iy = \pm \frac{2i\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Análogamente, en el punto cíclico $x_2 = 0$, $x_0 = 0$, las tangentes serán:

$$x - iy = \pm \frac{2i\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Estas dos parejas de rectas se encuentran en los puntos reales de coordenadas:

$$\left(0 \; ; \pm \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{c}\right)$$

Puesto que estas tangentes jamás pueden coincidir, los puntos cíclicos de la curva nunca podrán ser cuspidales.

Mediante la fórmula de Plücker se ve que la curva es de género 1; aplicando la fórmula de clasificación $c=n(n-1)-2d-3k$ se obtiene que la curva es de clase 8. De las fórmulas

$$i=2n(n-1)-6d-8k \text{ y la } t=\tfrac{1}{2}[c\,(c-1)-n-3i]$$

se tiene que la curva tiene 8 tangentes dobles y doce puntos de inflexión.

Resumiendo, las características de la curva son:

Género	Clase	Puntos dobles	Cúspides	Tangentes dobles	Ptos de Infl.
1	8	2	0	8	12

§ 4

Si hacemos coincidir el eje del cono con el eje de las Z, se obtiene una curva que tiene las mismas características. En tal caso la C_4 estará representada por el sistema:

$$C_4 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \\ a^2\,\xi^2 + b^2\,\eta^2 - c^2\,\zeta^2 = 0 \end{array} \right.$$

y la proyección estereográfica:

$$(x^2+y^2)^2+8(x^2+y^2)+16\frac{a^2}{c^2}x^2+16\frac{b^2}{c^2}y^2-16=0$$

esta curva es simétrica respecto de los ejes coordenados y tiene con cada uno de ellos en común siempre 4 puntos reales, constando por consiguiente de dos óvalos interno el uno respecto del otro.

§ 5

Consideremos el caso en que la esfera encuentra tan solo una parte de las generatrices del cono.

Podemos imaginar que el cono sea tangente al plano de ecuación $Z=0$. y tenga una generatriz coincidente con el eje η.

Su ecuación será:

$$a\xi^2+b\zeta^2+m\xi\zeta+nm\,\zeta-np\,\zeta=0$$

en que p es la η del vértice del cono, siendo su proyección estereográfica:

$$(b-np)\,(x^2+y^2)^2+(4mx+4ny)\,(x^2+y^2)+16ax^2-8b\,(x^2+y^2)-$$
$$-16(m+n)y+16(b+np)=0$$

Su punto fundamental tendrá por coordenadas

$$\left(-\frac{m}{b-\eta p}\ ;-\frac{n}{b-\eta p}\right)$$

Será simétrica respecto al eje y tiene en común con cada uno de los ejes dos puntos reales y dos imaginarios.

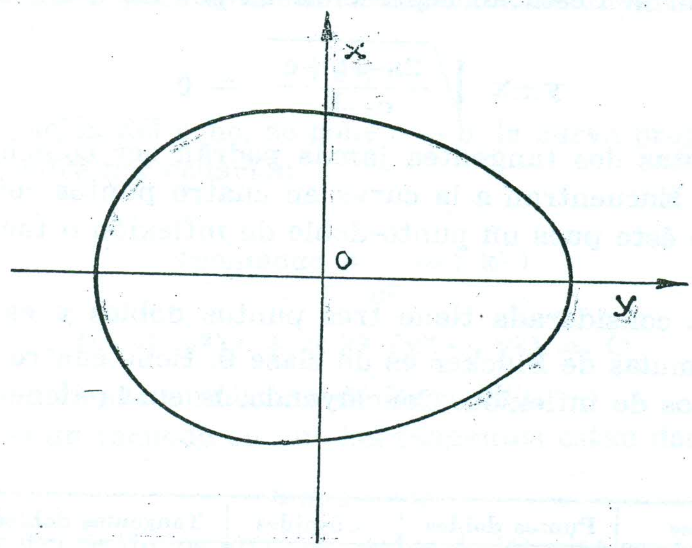

Fig. 2

§ 6

Examinemos ahora el tercer caso, en que la esfera encuentra todas las generatrices del cono y sea tangente a una de ellas.

Imaginemos que el cono sea tangente al plano $z = -1$, a lo largo de la generatriz paralela al eje η. Así que la esfera y el cono tendrán en el punto $(0, 0, -1)$ el mismo plano tangente.

La ecuación del cono será:

$$ap\xi^2+bp\zeta^2+mp\xi\zeta+(b-c)\eta\zeta+pm\xi+(b-c)\eta+p(b+c)\zeta+pc=0$$

en que p es la η del vértice. La C_4 estará representada por el sistema:

$$C_4 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1 \\ ap\xi^2+bp\zeta^2+mp\,\xi\zeta+(b-c)\eta\zeta+pm\xi+(b-c)\eta+p(b+c)\zeta+pc=0 \end{array} \right.$$

y su proyección estereográfica:

$$\begin{array}{c} p(b+c)\,(x^2+y^2)^2+4[pmx+(b-c)y]\,(x^2+y^2)\ - \\ 4p(b-c)\,(x^2+y^2+8apx^2=0 \end{array}$$

se ve que es una cuártica bicircular que tiene por punto fundamental el de coordenadas

$$\left(-\frac{m}{b+c};\ \frac{c-b}{p(b+c)}\right)$$

Es simétrica respecto al eje y, tiene, en el origen un punto doble. Las tangentes en el origen estarán representadas por las ecuaciones

$$y \pm x \sqrt{\frac{2a-b+c}{c-b}} = 0$$

y, puesto que estas dos tangentes jamás podrán ser coincidentes, el origen es un nodo. Encuentran a la curva en cuatro puntos coincidentes con el origen, siendo éste pues un punto doble de inflexión o tac-nodo (del inglés tac-point).

La cuártica considerada tiene tres puntos dobles y es racional.

Por las fórmulas de Plücker es de clase 6, tiene cuatro tangentes dobles y seis puntos de inflexión. Concluyendo, la curva tiene las siguientes características:

Género	Clase	Puntos dobles	Cúspides	Tangentes dobles	Ptos de Infl.
0	6	3	0	4	6

§ 7

Se obtiene una serie de fórmulas análogas a las precedentes, considerando el vértice del cono en el punto (0,0,—1) y con eje paralelo al η, siendo en tal caso su ecuación:

$$a^2\,\xi^2 - b^2\,\eta^2 + c^2\,(\zeta+1)^2 = 0$$

y estando dada la C_4 por el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1 \\ a^2\,\xi^2 - b^2\,\eta^2 + c^2\,(\zeta+1)^2 = 0 \end{array}\right.$$

y su proyección estereográfica:

$$(x^2+y^2)^2 + 4\frac{a^2}{c^2}x^2 - 4\frac{b^2}{c^2}y^2 = 0$$

Tal curva, llamada lemniscata hiperbólica de Booth, es de forma similar a la precedente y tiene las mismas características plückerianas.

El origen es un punto doble y las tangentes en él están dadas por las ecuaciones

$$x \pm \frac{b}{a} y = O$$

las que encuestra a la curva en cuatro puntos coincidentes en el origen. Por lo tanto también para esta curva el origen es un tacnodo.

§ 8

Si en la ecuación del cono, se pone a = b, la curva proyección estereográfica de C_4 tendrá por ecuación

$$\left(\text{poniendo } 4 \frac{a^2}{c^2} = 2 k^2\right)$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2 k^2 (x^2 - y^2) = O$$

que es, como se sabe, la lemniscata de Bernouilli.

El origen es un tacnodo en que las tangentes están dadas por la:

$$x \pm y = O$$

esto es, las bisectrices de los ángulos rectos de los ejes coordenados.

Escribiendo en la ecuación $(x^2+y^2)^2+2k^2 (x^2-y^2)=O$

$$x+iy= \frac{x_1}{x_0}$$

$$x-iy= \frac{x_2}{x_0}$$

se tiene:

$$x_1^2x_2^2+k^2 (x_1^2+x_2^2)x_0^2=O$$

de la que se deduce que la curva tiene, en el punto cíclico $x_1 = O$, $x_0 = O$ las dos tangentes

$$x \pm iy = i.k$$

y en el punto cíclico $x_2 = O$, $x_0 = O$

$$x \mp iy = i.k$$

Cada una de estas cuatro tangentes encuentra a la curva en cuatro puntos coincidentes con el respectivo punto de contacto, de modo que también los puntos cíclicos son puntos dobles de inflexión.

Las características plückerianas de la Lemniscata de Bernouilli son las mismas que las de las curvas precedentes.

Además la lemniscata de Bernouilli goza de la propiedad de que la normal en un punto P forma con el eje de las ordenadas un ángulo ω igual al triple del ángulo v y que el radio vector OP forma con el mismo eje.

Por lo tanto, el problema de llevar a la lemniscata normales (o tangentes) de dirección dada, es idéntico al de la trisección del ángulo.

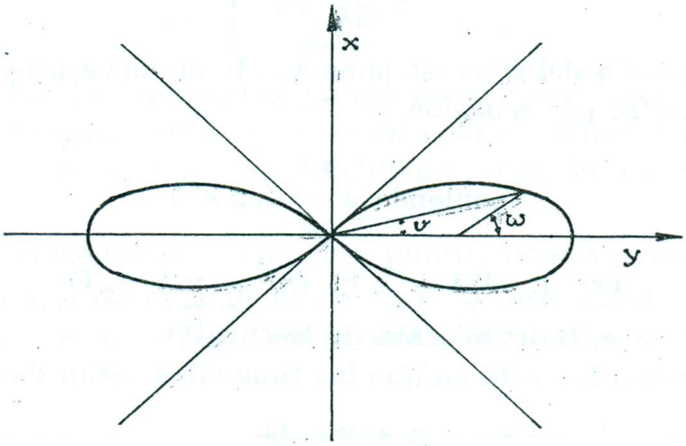

Fig. 3

§ 9

Otra lemniscata, llamada lemniscata elíptica de Booth, se obtiene proyectando la C_4 intersección de la esfera con un cono con vértice en el punto (0,0—1) con eje coincidente con el eje ξ.

La C_4 estará representada por el sistema

$$C_4 \equiv \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1 \\ a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^2(\zeta + 1)^2 = 0 \end{cases}$$

y la proyección estereográfica:

$$(x^2+y^2)^2 - 4\frac{a^2}{c^2}x^2 - 4\frac{b^2}{c^2}y^2 = 0$$

siendo las características plückerianas iguales a las precedentes.

Las tangentes en el origen están dadas por las ecuaciones:

$$x \pm \frac{b}{a} iy = 0$$

Siendo, por tanto, el origen un punto aislado.

Si además fuese $a = b$, entonces la curva se reduciría a la circunferencia

$$x^2+y^2=8\frac{a^2}{c^2} \text{ y a las rectas isótropas } x^2+y^2=0$$

La lemniscata de Bernoulli es un caso particular de la curva de Cassini que es el lugar geométrico de los puntos M tales que, dados dos puntos F_1 y F_1 del mismo plano, se tenga siempre

$$MF_1 . MF^2 = \text{constante}$$

La ecuación general de la curva cassiniana es:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)+a^4-c^4=0$$

Consta de dos ramas distintas si es

$$a^2 > c^2$$

y de una sola si es en vez

$$a^2 < c^2$$

transformándose en una lemniscata de Bernouilli si es $a^2=c^2$.

Además de la lamniscata de Bernouilli ya vista, así como el modo de obtenerla, las otras dos curvas pueden obtenerse por proyección estereográfica de la intersección de un cilindro circular con la esfera.

En efecto, proyectando

$$C_4 \equiv \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \\ \xi^2 + \zeta^2 + 2\,\zeta = 0 \end{cases}$$

se tiene la curva:

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{8}{3}(y^2+x^2) + 16x^2 - \frac{16}{3} = 0$$

que es la cassiniana formada por una sola rama. Poniendo ahora

$$x+iy = \frac{x^1}{x_0} \text{ e } ' \; x - iy = \frac{x_2}{x_0},$$

se encuentra que ésta tiene en los puntos cíclicos las siguientes tangentes:

$$x+iy = \pm\frac{2i}{\sqrt{3}} \; ; \; x-iy = \pm\frac{2i}{\sqrt{3}}$$

las que nos hacen ver que los puntos cíclicos son tacnodos.

Los dos puntos $\left(0\,;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(0\,;-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ son los focos extraordinarios de la curva.

Las caracterísicas plückerianas de la curva son:

Género	Clase	Puntos dobles	Cúspides	Tangentes dobles	Ptos de Infl.
1	8	2	0	8	12

Capítulo II

CONSIDERACIONES SOBRE LAS CUARTICAS RACIONALES OBTENIDAS POR TRANSFORMACION BIRRACIONAL CUADRATICA DE UNA CONICA

Una cuártica con tres puntos dobles puede derivarse de una cónica. En efecto, tomando sus tres puntos singulares (A_1, A_2, A_3) como vértices del triángulo de referencia, la ecuación de la curva toma la forma:

$$a_{11}x_2^2x_3^2+a_{22}x_1^2x_3^2+a_{33}x_1^2x_2^2+2a_{23}x_1^2x_2x_3+$$
$$2a_{13}x_2^2x_1x_3+2a_{12}x_3^2x_1x_2=0$$

efectuemos la transformación cuadrática dada por:

$$\rho x_i = \frac{1}{y_i}$$

obteniéndose la cónica K.

$$a_{11}y_1^2+a_{22}y_2^2+a_{33}y_3^2+2a_{23}y_2y_3+2a_{13}y_1y_3+2a_{12}y_1y_2=0$$

Recíprocamente, la cuártica puede derivarse de una cónica mediante una transformación cuadrática.

Si la cónica K toca o corta en dos puntos reales el lado A_2 A_3 del triángulo fundamental, la curva Γ tiene dos tangentes reales en el vértice opuesto A_1, éste será un nodo; pero si estos dos puntos son coincidentes, se tiene un punto cuspidal, y si son imaginarios conjugados, un punto aislado.

Si la cónica tiene pues seis intersecciones con el triángulo A_1 A_2 A_3, la Γ tiene tres nodos, si tiene seis imaginarias, tendrá tres puntos aislados, y por fin si presenta tres puntos de contacto, tendrá tres cúspides.

En el primer caso las seis tangentes a la curva en los puntos dobles tocan la misma cónica. En el caso de una cuártica con tres cúspides las tres tangentes cuspidales son rectas concurrentes en un punto.

Una cuártica es racional cuando tiene tres puntos dobles pero también cuando tiene un punto triple.

Tomando éste como vértice A_3 del triángulo de referencia, la ecuación de la curva asume la forma:

$$x_3 u_3 (x_1 x_2) - u_4 (x_1 x_2) = O$$

siendo u_3 y u_4 formas ordinarias, la primera cúbica y la segunda bicuadrática.

Capítulo III

CUARTICAS BICIRCULARES OBTENIDAS COMO ENVOLVENTE DE UN HAZ DE CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES A UNA CIRCUNFERENCIA FIJA Y TENIENDO SUS CENTROS SOBRE UNA CONICA

Cada cuártica bicircular es racional cuando tiene tres puntos dobles de los cuales dos coinciden con los puntos cíclicos del plano y puede considerarse como la envolvente de una circunferencia ortogonal a una circunferencia fija y cuyo centro pertenece a una cónica llamada de referencia.

Sean en efecto:

$$C_i \equiv (x-\alpha_i)^2 + y - \beta_i)^2 = r_i^2 \ (i=0,1,2)$$

las ecuaciones de tres circunferencias ortogonales a las circunferencias dadas; cualesquieras sean las constantes λ_1, λ_2, λ_3 la ecuación:

$$(1') \qquad \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = O$$

representará otra circunferencia que goza de las mismas propiedades.

Las λ son proporcionales a las coordenadas baricéntricas del centro O de esta circcunferencia respecto del triángulo que tiene por vértices los centros de las tres primeras.

Puesto que por hipótesis O pertenece a una cónica, las λ estarán ligadas por una relación del siguiente tipo:

$$(1) \qquad \Sigma_{ik} a_{ik} \lambda_i \lambda_k = O \qquad \left\{ \begin{array}{l} i,k=0,1,2 \\ a_{ik}=a_{ki} \end{array} \right.$$

Para hallar la envolvente de la circunferencia (1^1) mediante la condición (1), escribamos:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = p \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = q$$

y tendremos las ecuaciones

$$1'') \qquad \begin{array}{l} C_0+pC_1+qC_2=O \\ a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2+2a_{01}p+2a_{02}q+a_{00}=O \end{array}$$

las que habremos de combinar con las ecuaciones derivadas respecto de p, q, de la siguiente:

$$a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2+ 2a_{01}p+2a_{02}q+a_{00}+2\rho(C_0+C_1p+C_2q)=O$$

Tales ecuaciones son:

$$\begin{array}{l} a_{01} + a_{11}\,p + a_{12}\,q + \rho\,C_1 = O \\ a_{02} + a_{12}\,p + a_{22}\,q + \rho\,C_2 = O \end{array}$$

Multiplicando respectivamente por p y q y sustrayendo los productos de la precedente, se obtiene:

$$a_{00}+a_{10}p+a_{20}q+\rho C_0=O$$

Estas con las dos precedentes y la (1'') constituyen un sistema lineal en p, q, ρ; la eliminación de estas cantidades dará la ecuación buscada de la envolvente bajo la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & C_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & C_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & C_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 & O \end{vmatrix} = 0$$

Consideremos dos circunferencias envolventes consecutivas: éstas se intersacarán en dos puntos pertenecientes a la cuártica recién obtenida; de aquí se sigue pues que todas las circunferencias envolventes son bitangentes. En particular, los cuatro puntos de intersección de la cónica de referencia con la circunferencia dada, son los focos de ésta.

Si aplicamos una transformación por radios vectores recíprocos, teniendo por centro el centro de la circunferencia y por potencia el cuadrado de su radio, cada circunferencia envolvente se transforma en sí misma, aconteciendo lo mismo para la curva envolvente.

CAPÍTULO IV

GENERACION DE CUARTICAS BICIRCULARES MEDIANTE DOS HACES DE CIRCUNFERENCIAS PROYECTIVAS

§ 1

Dadas dos curvas de orden n, f_1 y f_2, formemos la combinación

$$f_1 + \lambda f_2 = O$$

se tiene pues así el haz de curvas de orden n que tiene n^2 puntos comunes como puntos base del haz.

A cada curva del haz le corresponde un valor de lambda recíprocamente.

Sean φ_1 y φ_2 otras dos curvas de orden n, y formemos análogamente el haz

$$\varphi_1 + \mu \varphi_2 = O$$

con n'^2 puntos comunes.

Establezcamos ahora una correspondencia entre los parámetros lambda y mu, dada por la relación:

$$\alpha_0\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots\ldots \alpha_k = O$$

en que las α_i son polinomios de grado K' en la fórmula anterior.

Dado un valor de μ, a éste corresponderán K valores de lambda, esto es K curvas del haz

$$f_1 + \lambda f_2 = O$$

y análogamente dado un valor de lambda a éste corresponderán K' valores de μ esto es K' curvas de

$$\varphi_1 + \mu \varphi_2 = O$$

Se establece de esta manera una correspondencia de orden (K, K') entre las curvas de ambos haces.

Dada ahora una recta en el plano común a los dos haces, ésta encontrará una curva del primer haz, relativa al parámetro λ_i, en n puntos.

Al parámetro λ_i corresponden K' parámetros μ, esto es K' curvas del segundo haz, que intersecarán la recta dada en n' K' puntos, correspondiendo a cada una de estas curvas, K curvas del primer haz que encontrarán la recta dada en n. K puntos.

Si ahora queremos determinar el número de puntos unidos de una correspondencia obtenida de esta manera y llamada de Chasles, bastará poner en la ecuación que liga los parámetros, lambda = mu y tendremos así n.K + n'.K' puntos unidos.

Estos son los puntos comunes a las parejas de curvas correspondientes en ambos haces.

El lugar de estas intersecciones, por encontrar a la recta dada en n.K + n'.K' puntos, será de este orden: n.K + n'.K'.

En el caso de ser K = K' = 1, esto es que la correspondencia sea una proyectividad, su lugar geométrico será de orden n + n' y en el caso particular de ser aún n = n' = 2, esto es, qce ambos haces lo sean de cónicas, se tendrá como lugar geométrico de las intersecciones de las curvas correspondientes en los dos haces proyectivos, una **cuártica.**

En el caso de que los dos haces sean haces de centros proyetivos, se tendrá una cuártica bicircular.

Consideremos la ecuación que ligan los parámetros λ y μ en el caso de una proyectividad:

$$(a\,\mu + b)\,\lambda + c\,\mu + d = O$$

esto es

$$a\,\lambda\,\mu + b\,\lambda + c\,\mu + d = O \text{ es decir } \lambda = -\frac{c\,\mu + d}{a\,\mu + b}$$

puesto que la proyectividad de este género puede considerarse como el producto de un cierto número de relaciones simples tales como:

$$\lambda = k\,\mu \;;\; \lambda = \mu + h \;;\; \lambda = \frac{m}{\mu}$$

podemos considerar la ecuación de la proyectividad en una de estas tres formas.

§ 2

Consideremos la primera: $\lambda = k\,\mu$

sean $C_1 = x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = O$
$\quad\;\; C_2 = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = O$

las ecuaciones de dos circunferencias.

Se forma el haz

$$C_1 + \lambda\,C_2 = O$$
$$(1+\lambda)\,(x^2+y^2) + (a+a'\,\lambda)x + (b+b'\,\lambda)y + c + \lambda c' = O$$

sea análogamente

$$C_3 + \mu C_4 = O$$

otro haz; por lo tanto es

$$(x^2 + y^2) + m x + n y + p + \mu (x^2 + y^2 + m' x + n' y + p') = O$$

en que la λ y μ están ligadas por la relación $\lambda = k \mu$; hallemos el lugar geométricos de las intersecciones de las circunferencias correspondientes:

$$\left.\begin{array}{l} (1 + \lambda) (x^2 + y^2) + (a + a' \lambda) x + \\ \quad (b + b' \lambda) y + c + \lambda c' = O \\ \quad x^2 + y^2 + m x + n y + p + \\ \frac{\lambda}{k} (x^2 + y^2 + m' x + n' y + p') = O \end{array}\right\} \begin{array}{l} C^1 + \lambda C^2 = O \\ \\ C_3 + \frac{\lambda}{k} C_4 = O \end{array}$$

$$\lambda = - \frac{C_1}{C_2} \quad ; \quad C_3 = \frac{C_1 C_4}{k C_2} \quad ; \quad k C_2 C_3 - C_1 C_4 = O$$

$$k(x^2+y^2+2a'x+2b'y+c') \quad (x^2+y^2+2mx+2ny+p) -$$
$$-(x^2+y^2+2ax+2by+c) \quad (x^2+y^2+2m'x+2n'y+p) = O$$

$$(k-1) (x^2+y^2)^2+k(x^2+y^2) \; [(2a'x+ab'y)+(2mx+2ny)+(c'+p)] -$$
$$(x^2+y^2) \; [(2ax+2by)+(2m'x+2n'y) +(c+p')]+$$
$$k(2a'x+2b'y+c') \; (2mx+2ny+p)-(2ax+2by+c) \; (2m'x+2ny+p') = O$$

de donde en definitiva:

$$(k-1) (x^2+y^2)^2+ (x^2+y^2 \{ 2[k(a'+m)-(a+m')]x+2[k(b'+n)-(b+n')]$$
$$y \qquad \} +x^2[(c'+p)k-(c+p')+4(ka'm-am')]+y^2[(c'+p)k-$$
$$(c+p')+(kb'n-bn')]+2xy[2k(a'n+b'm)-2(an'+bm')]+$$
$$2x[k(a'p+mc')-(ap'+cm')]+2y[k(b'p+c'n)-(bp'+cn')] +$$
$$kc'p-cp' = O$$

Como puede verse se tiene una cuártica bicircular, en el caso de ser K 1, teniendo sus puntos fundamentales las coordenadas:

$$\left[\frac{k(a'+m)-(a+m')}{2(1 - k)} \quad ; \quad \frac{k(b'+n)-(b+n')}{2(1 - k)} \right]$$

éste coincidirá con el origen si:

$$k(a'+m) - (a+m') = O \qquad k = \frac{a + m'}{a' + m}$$

$$k(b'+n) - (b+n') = O \qquad k = \frac{b + n'}{b' + n}$$

esto es si:

$$\frac{a + m'}{a' + m} = \frac{b + n'}{b' + n} = k$$

en particular sí

$$a' = -m \qquad a = -m' \qquad b' = -n \text{ y } b = -n'$$

esto es, si los centros de las circunferencias C_1 y C_4 son simétricos respecto del origen, y así también los centros de las circunferencias C_2 y C_3; esto es que el cuadrilátero C_1 C_2 C_3 C_4 es un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en el origen.

Si $K = 1$, entonces, la ccrva se reducirá a una cúbica.

Si se tiene

$$\frac{c\ p'}{c'\ p} = k \qquad \frac{a\ p' + c\ m'}{a'p + c'\ m} = k \text{ y } \frac{b\ p' + c\ n'}{b'\ p + c'\ n} = k$$

entonces el origen será un punto doble como en la hipótesis de que los dos haces tengan el origen como punto de base común.

En este caso la ecuación de la curva toma la forma:

$$(k-1)(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)\{2[k(a'+m)]-(a+m')]x+2[k(b'+n)-(b+n')]y\}+4x^2(ka'm-am')+4y^2(kb'n-bn')+2xy[2k(a'n+b'm)-2(an'+bp')] = O$$

y las tangentes en el origen estarán dadas por:

$$4\lambda^2(ka'm-ma')+4(kb'n-bn')+4\lambda[k(a'n+b'm)-(an'+bm')] = O$$

$$\lambda = \frac{[k(a'n+b'm)-(an'+bm')] \pm \sqrt{[k(a'n+b'm)-(an'+bm')]^2-4(ka'm-am')(kb'n-bn')}}{2(ka'm-am')}$$

y según que sea $\triangle \gtreqless O$, se tendrá respectivamente, un **nodo,** un **punto aislado** o un **punto cuspidal.**

Capítulo V

CUARTICAS BICIRCULARES OBTENIDAS MEDIANTE LA INVERSION CIRCULAR DE UNA CONICA K

§ 1

Sea u un plano y K una circunferencia de centro O y radio r situado sobre π.

Denomínase inversión respecto de la circunferencia fundamental K, la transformación del plano u en sí mismo que en cada punto P distinto de O hace corresponder al mismo aquel punto P' de la semirecta OP, que satisfaga la relación $OP.OP' = r^2$.

El punto O llámase centro, r el radio y r^2 la potencia de la inversión.

Una intersección circular está individualizada por el centro y por el radio; o bien por el centro y una pareja de puntos correspondientes o aún por dos parejas de puntos correspondientes.

Esta admite como puntos unidos todos y solamente los puntos de la circunferencia de inversión.

Tal inversión puede aún definirse como aquella transformación que a cada punto P distinto de O hace corresponder la intersección de la recta OP con la polar de P respecto de K.

Las figuras correspondientes en una inversión circular se dicen inversas la una respecto de la otra.

Una figura inversa a sí misma, llámase analagmática.

Una inversión circular transforma a cada recta que pasa por el centro, en sí misma y a cada recta que no pasa por el centro en una circunferencia que pasa por el centro; a cada circunferencia que pasa por el centro en una recta que tampoco pasa por el centro, y finalmente a cada circunferencia que no pasa por el centro en una circunferencia que tampoco pasa por allí.

Una recta que pasa por el centro de inversión es analagmática.

Toda línea analagmática es la envolvente de una circunferencia móvil, cuyo centro describe una curva denominada de referencia.

Cuando la curva de referencia es una cónica, la curva analagmática toma el nombre de cíclica.

Precisamente: Si la curva de referencia es una elipse o una hipórbola, la cíclica es una **cuártica;** cuando la curva de referencia es una parábola, la cíclica es una **cúbica** que pasa por el centro de inversión.

A las inversiones circulares se las denomina también transformaciones por radios vectores recíprocos.

En coordenadas cartesianas ortogonales las fórmulas de transformación son:

$$x^1 = \frac{r^2x}{x^2+y^2} \quad ; \quad y^1 = \frac{r^2y}{x^2+y^2}$$

La inversa de una curva de orden n pasando r veces por el origen y s veces por los puntos cíclicos del plano, es una curva de orden 2n — (r + 2s) y pasa por los puntos cíclicos del plano (n — s — r) veces y (n — 2s) por el origen.

Si se transforma pues, una recta, deberá tenerse una cónica que pasa por los puntos cíclicos del plano y esta cónica será por tanto una circunferencia; si se transforma una cónica que no pasa ni por el origen ni por los puntos cíclicos del plano, deberá tenerse una cuártica que pasa dos veces por los puntos cíclicos del plano.

Si en vez la cónica pasa por el origen, simplemente se tendrá una cúbica que pasa una sola vez por los puntos cíclicos del plano y dos veces por el origen.

Por lo tanto, transformando una cónica cualquiera, se obtendrá una cuártica bicircular que posee un punto doble, esto es, una cuártica racional.

Sea por ejemplo la ecuación general de la cónica:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = O$$

$$\frac{r^4a_{11}x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{r^4a_{22}y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2a_{12}r^4xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2a_{13}r^2x}{x^2+y^2} + \frac{2a_{23}r^2y}{x^2+y^2} + a_{33} = O$$

$$a_{33}(x^2+y^2)^2 + 2r^2(a_{13}x + a_{23}y)(x^2+y^2) + r^4(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy) = O$$

el origen es un punto doble y sus tangentes estarán dadas por:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = O$$

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = O$$

$$\lambda = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

El origen será pues un nodo, un punto aislado o un punto cuspidal según sea:

$$\Delta \gtreqless O$$

En particular será: una cúspide sí $a^2_{12} = a_{11}\, a_{22}$

para estudiar el comportamiento en el infinito escribamos:

$$\begin{cases} x - iy = \dfrac{x_1}{x_0} \\[2ex] x + iy = \dfrac{x_2}{x_0} \end{cases}$$

$$a_{33}\,\frac{x^2x_2^2}{x_0^4} + r^2\left[a_{13}\,\frac{x_1+x_2}{x_0} + a_{23}\,\frac{x_1-x_2}{x_0}\right]\left[\frac{x_1x_2}{x_0^2}\right] +$$

$$r^4a_{11}\cdot\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_0^2} + r^4a_{22}\,\frac{(x_1+x_2)^2}{-4x_0^2} - 2ia_{12}r^4\,\frac{x_1^2-x_2^2}{x_0^2} = 0$$

$$4a_{33}x_1^2x_2^2 + 4r^2a_{13}x_0x_1^2x_2 + 4r^2a_{13}x_0x_1x_2^2 - 4a_{23}ir^2x_0x_1^2x_2 +$$
$$4a_{23}ir^2x_0x_1x_2^2 + r^4a_{11}x_0^2x_1^2 + 2r^4a_{11}x_0^2x_1x_2 + r^4a_{11}x_0^2x_2^2 - r^4a_{22}x_0^2x_1^2 +$$
$$2r^4a_{22}x_0^2x_1x_2 - r^4a_{22}x_0^2x_2^2 - 2a_{12}r^4x_0^2x_1^2 + 2a_{12}r^4ix_0^2x_2^2 = 0$$

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{-2(a_{13}+a_{23}i) \pm 2\sqrt{(a_{13}^2 - a_{23}^2 + 2ia_{13}a_{23}) - (a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33} + 2i(a_{12}a_{33})}}{r^2(a_{11} - a_{22} + 2a_{12}i)}$$

Estas pues serían las ecuaciones de las tangentes a la curva en el primer punto cíclico.

Análogamente podrían hallarse las del otro punto.

Se ve que éstas no pueden coincidir jamás, puesto que en ese caso debería verificarse la relación.

$$a_{11} - a_{22} + 2ia_{12} = 0$$

lo que es imposible si se considera que la cónica es real.

Unicamente en el caso $a_{12}=0$; $a_{11}=a_{22}$, esto es en el caso de reducirse la cónica a una circunferencia tal cosa sería posible, pero excluimos este caso por cuanto aquí se obtendría mediante la transformación, otra circunferencia.

Para las características Plückerianas de la curva se tiene, en el caso de ser el origen un nodo o punto aislado:

$$\text{clase} = n\,.\,(n-1) - 2d - 3\,K = 6$$

En el caso de ser el origen un punto cuspidal:

$$\text{clase} = 5$$

§ 2

Consideremos algún ejemplo:

Si transformamos una hipérbola equilátera representada mediante la ecuación $x^2 - y^2 = a^2$, se obtiene la lemmniscata de Bernoulli:

$$x^2 - y^2 = a^2 \, (x^2 + y^2)^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{a_2} (x^2 - y^2) = 0$$

Esta curva es el lugar de los puntos tales que el producto de las distancias de los mismos a dos puntos fijos del plano, sea constante e igual al cuadrado de la semidistancia entre esos mismos puntos.

Los dos puntos fijos se denominan focos de la curva, teniendo en nuestro caso las coordenadas

$$\left(\frac{1}{a \sqrt{2}} : 0\right), \quad \left(-\frac{1}{a \sqrt{2}} : 0\right)$$

esto es tienen como coordenadas los valores recíprocos de las coordenadas de los focos de la hipérbola.

Hemos dicho al principio de este capítulo, que la transformación por radios vectores recíprocos podía definirse como aquélla que a cada punto P hace corresponder la intersección de la ligada P con el centro de inversión , con la polar de P respecto de la circunferencia de inversión.

Puesto que tal ligada es perpendicular a la polar, la cuártica que se obtiene, después de la transformación, puede considerarse asimismo como la curva podaria de la cónica envolvente de las polares de los puntos de la cónica lugar, respecto de la circunferencia de inversión.