PROBLEMAS

Por el profesor contratado DOCTOR SEVERINO VILLATICO

Considérese la familia de parábolas:

$$(1) \qquad (y - tx)^2 - 2t^2Ry = O$$

Donde R es una constante positiva y t un parámetro.

Estudiar:

1º El comportamiento de tales parábolas en el origen.

2º La curva envolvente de los ejes de tales parábolas [1].

Se trata de una familia de parábolas tangentes al eje x en el origen. A la familia pertenece el eje x mismo como única cónica degenerada y se obtiene de la (1) para $t = O$.

Además poniendo $f(x,y,t) = (y - tx)^2 - 2t^2Ry$ se tiene:

(I,) $f(x,y,t) = f(-x,y,-t)$, esto es, las parábolas de la familia para valores opuestos del parámetro resultan simétricas respecto al eje $\underline{y}$ y situadas en el semiplano $y \geq O$ y por lo tanto si deseamos estudiar la (1) podemos limitarnos al caso $t > O$.

El círculo osculador en el origen a la parábola, correspondiente al valor t del parámetro, tiene una ecucación del tipo:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha y = O$$

donde α se determina imponiendo la condición que tres de las intersecciones del círculo con la parábola sean coincidentes en el origen.

Las intersecciones del círculo con la parábola son los puntos base del haz de cónicas:

$$(y - tx)^2 - 2t^2Ry + \lambda (x^2 + y^2 - 2\alpha y) = O$$

o sea los puntos comunes al círculo y a la cónica del haz que corresponde al valor $\lambda = -t^2$ del parámetro λ. —

$$(2) \qquad y[(1 - t^2)y - 2tx + 2t^2(\alpha - R)] = O$$

Ahora a fin de que tres de estos puntos coincidan en el origen es necesario y suficiente que resulte:

$$\alpha = R$$

---

(1) Tema dado al concurso de cátedras para profesores del Liceo Científico en Italia, 1942.

y esto para cualquier t. Sigue «toda parábola de la familia tiene como círculo osculador en el origen el círculo de radio R y centro (O,R)

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0 \quad (3)$$

Viceversa propongámonos el problema de determinar la ecuación de las parábolas osculatrices en el origen al círculo (3).

Una parábola de tal tipo es tangente en el origen al eje x y por lo tanto tiene una ecuación del tipo:

$$(ax + y)^2 + by = 0 \qquad (4)$$

Impongamos la condición que las intersecciones con el círculo (3) en el origen sean tres, operando como sobre el haz de cónicas:

$$(ax + y)^2 + by + \lambda\,(x^2 + y^2 - 2Ry) = 0$$

y considerando la cónica degenerada obtenida para $\lambda = -a^2$

$$y\ [(1 - a^2)y + 2ax + b - 2a^2R] = 0$$

de la cual, a fin de que tres puntos base del haz de cónicas coincidan con el origen es necesario y suficiente que sea:

$$b = 2a^2R$$

Poniendo $a = -t$ la (4) resulta la (1) $(y - tx)^2 + by = 0$ de donde se concluye: «La (1) es la ecuación de las parábolas osculatrices al círculo (3) en el origen».

El eje de la parábola correspondiente al valor t del parámetro es paralelo a la recta $y = tx$; por la tanto es la recta de ecuación:

$$t.\frac{\delta f}{\delta x} - \frac{\delta f}{\delta y} = 0 \quad \text{o sea}$$

(5) $\quad t(1 + t^2)x - (1 + t^2)y + t^2R = 0$ que puede escribirse:

(6) $$y = tx + R\frac{t^2}{1 + t^2}$$

Poniendo $t = \text{tg}\ \varphi$ la (5) se transforma en:

(7) $$y = x\,\text{tg}\ \varphi + R\text{sen}^2\ \varphi$$

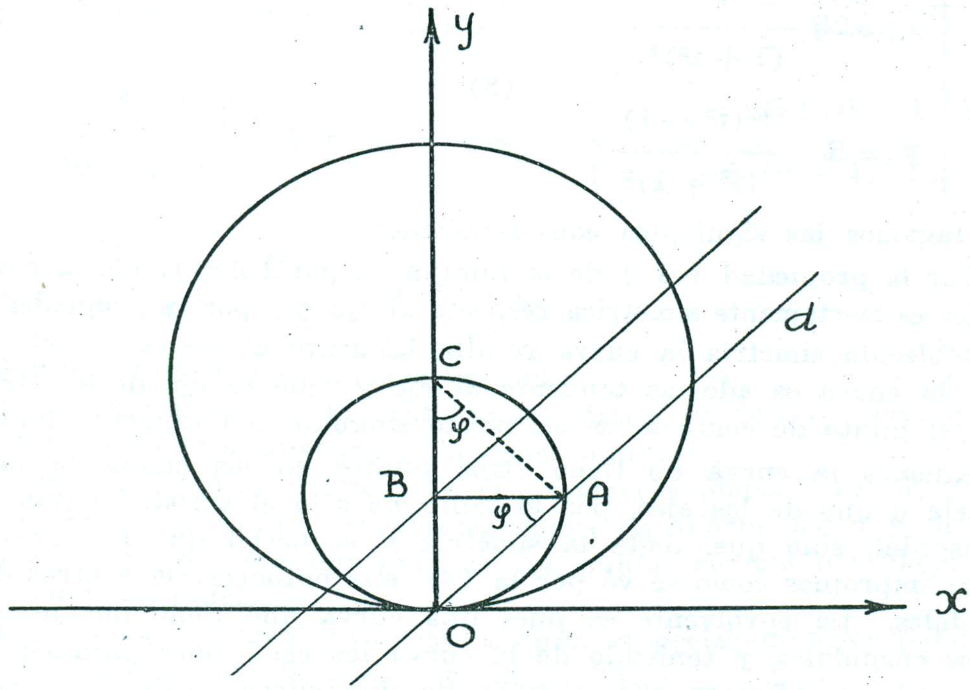
Esta expresión de la ecuación del eje nos da una simple construcción del eje mismo.

Dado el valor del parámetro t correspondiente a la parábola trácese la recta, d, de coeficiente angular $t = \text{tg}\ \varphi$. El eje de la parábola es paralelo a esta recta y corta al eje y en el punto de ordenada $R\text{sen}^2\ \varphi$.

Descripto el círculo de radio OC [siendo C el centro del círculo (3)] se llama A a la intersección de la d con el círculo, distinta del origen y B el pie de la perpendicular de A sobre el eje, así se tiene:

$$O\hat{A}B = A\hat{C}B \quad \text{y por lo tanto}$$

$OB = OA \operatorname{sen} \varphi = OC \operatorname{sen}^2 \varphi = R \operatorname{sen}^2 \varphi$, por lo tanto: «El eje de la parábola es la recta de coeficiente angular t y que pasa por el punto B».



De la (2) surge que la ulterior intersección de la parábola con el círculo osculador coincide con la intersección de éste con la recta:

$y(1 - t^2) - 2tx = O$ o sea introduciendo el parámetro φ

$y = \operatorname{tg} 2\varphi . x$ esto es con la recta por el origen que forma con el eje x el ángulo 2φ.

Se conostruye así fácilmente no sólo el eje de la parábola sino también el ulterior punto de encuentro de ésta con el círculo osculador.

De la (1) y de las consideraciones hechas se deduce:

a) En la familia de parábolas existe una y una sola parábola de eje horizontal y es la parábola degenerada, el eje x mismo que se obtiene para $t = O$

b) Existe una sola parábola de eje vertical y se obtiene para $t \rightarrow \infty$

$$x^2 - 2Ry = O$$

El eje de la parábola coincide con el eje y y se verifica que ésta coincide con la envolvente de la familia.

c) Más general, en la familia existe una sola parábola con eje paralelo a una dirección dada.

Busquemos ahora la ecuación de la envolvente de los ejes.

De la (5) derivando respecto al parámetro se obtiene:

$(1 + 3t^2)x - 2ty + 2Rt = O$ y sacando $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de ésta y de la (5) se tiene las ecuaciones paramétricas de la envolvente:

$$\begin{cases} x = 2R \dfrac{t}{(1 + t^2)^2} \\ y = R \cdot \dfrac{t^2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} \end{cases} \qquad (8)$$

Hagamos las siguientes consideraciones:

Por la propiedad (1) de la familia de parábolas la curva envuelta por los ejes es ciertamente simétrica respecto al eje $\underline{y}$; por la propiedad a) y por la establecida simetría la curva resulta tangente al eje x en el origen por la b) la curva es además tangente al eje y, que es eje de simetría, por lo tanto el punto de contacto es un punto singular con tangente única.

Además la curva no tiene otros puntos en los cuales la tangente es paralela a uno de los ejes, por lo tanto no sólo el susodicho punto singular es cuspidal, sino que, dada la simetría y el hecho que la curva no tiene puntos impropios como se vé por la (8), ella entonces tiene otros dos puntos cuspidales. La envolvente es pues una curva que tiene por lo menos tres puntos cuspidales, y teniendo de la curva las ecuaciones paramétricas racionales podemos afirmar que se trata de una curva racional y precisamente de una cuártica dado que tiene cuatro intersecciones con una recta genérica. En efecto los valores del parámetro t correspondientes a los puntos de intersección de la curva con la recta:

$ax + by + c = O$ son las raíces de la ecuación de cuarto grado en t:

$$2Rat - Rbt^2(t^2 - 1) - c(t^2 + 1)^2 = O$$

Una cuártica con tres cúspides es de tercera clase, por lo tanto «nuestra curva es del cuarto orden y de tercera clase».

Habíamos señalado el hecho de que la curva no tiene puntos impropios, para confirmar esto consideremos el comportamiento al infinito de la misma.

Recordemos que los coeficientes angulares de las direcciones de los puntos al infinito están dados por $m = \lim\limits_{x \to o} y/x$ y la tangente en el eventual punto al infinito es la recta de ecuación $y = mx + c$; con $c = \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx)$ que se reduce a la recta impropia $(z = O)$ si éste último límite es infinito.

En nuestro caso se tiene $x \to \infty$ solamente para $t \to \pm i$ y es $\lim\limits_{x \to \infty} y/x =$

$$= \lim_{t \to \pm i} \tfrac{1}{2} t(1 - t^2) = \pm$$

A la curva pertenecen los puntos al infinito en la dirección de la recta $\mp iy = O$, esto es, los puntos cíclicos.

Para las tangentes se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} (y \mp ix) = \lim_{t\to\pm i} \left\{ \frac{t^2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \pm i \frac{2t}{(t^2+1)^2} \right\} =$$

$$= \lim_{t\to\pm i} \frac{2t}{(t^2+1)} \left\{ \frac{1}{2} t(t^2-1) \pm i \right\} = \lim_{t\to\pm i} \frac{\frac{1}{2} t(t^2-1) \pm i}{(t^2+1)^2/2t} =$$

$$= \lim_{t\to\pm i} \frac{t^2(t^2-1) \pm 2ti}{(t^2+1)^2} = \infty$$

por lo tanto la tangente es la recta impropia.

Nuestra curva es por lo tanto una cuártica de tercera clase que pasa por los puntos cíclicos tangentes a la recta impropia.

Un teorema, debido a Cremona (ver «Curvas planas', vol. I, pág. 191, de Loria) nos asegura que «cualquier curva de cuarto orden y de tercera clase tocada por la recta impropia en los puntos cíclicos del plano es una hipocicloide tricuspidal».

Por lo tanto la curva envolvente es una «hipocicloide tricuspidal».

En efecto poniendo $\operatorname{tg} \varphi/2 = t$ de la cual:

$$\frac{2t}{1+t^2} = \operatorname{sen} \varphi ; \frac{t^2-1}{t^2+1} = \cos \varphi$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1}{2} (\cos \varphi + 1) \quad ; \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi)$$

Las (8) se transforman:

$$\begin{cases} x = -R \dfrac{2t}{1+t^2} \cdot \dfrac{1}{1+t^2} = -(R/2) \operatorname{sen} \varphi (1 - \cos \varphi) \\ y = R \dfrac{t^2-1}{1+t^2} \cdot \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{R}{2} (\cos \varphi + 1) \cos \varphi \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \varphi)$ y poniendo $\dfrac{R}{4} = r$ se tiene en definitiva:

$$\begin{cases} x = -2r \operatorname{sen} \varphi + r \operatorname{sen} 2 \varphi \\ y - r = 2r \cos \varphi + \cos 2 \varphi \end{cases} \qquad (9)$$

Las (9) son justamente las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide tricuspidal y precisamente de la curva descripta por un punto situado sobre una circunferencia de radio $r = \frac{R}{4}$ que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia (e internamente a ésta) de radio $3r = {}^3/_4 R$ y centro en el punto (O,R).

La curva es por lo tanto interior al círculo de radio 3r, tiene tres cúspides de primera especie situadas en los vértices de un triángulo equilátero inscripto en el círculo, las tangentes son las bisectrices del triángulo, que unen el centro del círculo con los respectivos puntos cuspidales.

Por lo dicho anteriormente una de las cúspides está sobre el eje y y por lo tanto es la intersección de este eje con el círculo fijo, punto que en esencia no es otro que el centro (O,R) del círculo osculador a la parábola.

En efecto de las (8) se saca

$$x(O) = \lim_{t \to \infty} x(t) = O \qquad y(O) = \lim_{t \to \infty} y(t) = R$$

Las otras dos cúspides están en los vértices del triángulo equilátero inscripto en el círculo de radio 3r y que tiene uno de los vértices en el susodicho punto (O,R).

Podemos verificar lo expuesto pasando a la ecuación cartesiana de la curva.

Para tal fin efectuemos la transformación:

$x = x \quad y - R = \eta$ esto es, tomemos el punto doble (O,R) como origen.

Con tal transformación la

$t(1 + t^2)x - (1 + t^2)y + t^2R = O$ resulta

$$t^3x - t^2 \eta + tx - \eta - R = O \qquad (10)$$

derivando respecto al parámetro se obtiene:

$$3t^2x - 2t\eta + x = O \qquad (11)$$

Eliminando el parámetro t entre la (10) y la (11) se deduce la ecuación cartesiana de la envolvente.

$$f(x, \eta) = 4(x^2 + \eta^2)^2 + 36Rx^2\eta + 4R\eta^3 + 27R^2x^2 = O \qquad (12)$$

Como se observa la (12) representa una cuártica tocada por la recta impropia en los puntos cíclicos.

El origen es un punto doble con tangente única, (el eje Y) con contacto triple y por lo tanto una cúspide de primera especie. Ella es simétrica respecto a la tangente cuspidal.

Para determinar los otros puntos dobles resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta x} = x\,[8\,(x^2 + \eta^2) + 36\,R\,\eta + 27\,R^2] = O \\ &{}^1/_4 \frac{\delta f}{\delta \eta} = 4\,\eta\,(x^2 + \eta^2) + 9\,Rx^2 + 3\,R\,\eta^2 = O \\ &f(x\,\eta) = 4\,(x^2 + \eta^2)^2 + 36\,Rx^2\,\eta + 4R\,\eta^3 + 27\,R^2x^2 = O \end{aligned}\right. \qquad (13)$$

Para $x = O$ la primera de las (13) es idénticamente satisfecha y la segunda da $4\ \eta^3 + 3R\ \eta^2 = O$ mientras la tercera: $4\ \eta^4 + 4R\ \eta^3 = O$

Estas dos últimas ecuaciones en η no tienen soluciones comunes distintas de la cero, así las primeras dos de las (13) no tienen soluciones con $\eta = O$ y $x = O$. De aquí resulta la imposibilidad de que haya puntos singulares sobre los ejes coordenados distintos del origen.

Dividiendo la primera de las (13) por x, después multiplicándola por q restándola de la segunda multiplicada por 2 se obtiene:
$x^2 = {}^1/_6\,(10\ \eta^2 + 9\,R\ \eta)$

Sustituyendo tales valores en la primera de las (13), dividida por x, resulta:

$$\eta = -{}^9/_8\ R$$

$$x = \pm\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\ R$$

Se verifica fácilmente que los dos puntos

$$P_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\ R,\ -\ {}^9/_8\ R\right)$$

$$P_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\ R,\ -\ {}^9/_8\ R\right)$$ pertenecen a la curva y son puntos dobles de ella,

Para establecer la naturaleza de estos dos nuevos puntos dobles determinemos las ecuaciones de las tangentes en ellos.
Se tiene:

$$ {}^1/_2\ \frac{\delta^2}{\delta x^2}\ f\left(\pm\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\ R,\ -\ {}^9/_8\ R\right) = {}^{27}/_4\ R^2$$

$$ {}^1/_2\ \frac{\delta^2}{\delta x\,\delta\eta}\ f\left(\pm\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\ R,\ -\ {}^9/_8\ R\right) = \pm\ \frac{27\sqrt{3}}{4}\ R^2$$

$$ {}^1/_2\ \frac{\delta^2}{\delta\eta^2}\ f\left(\pm\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\ R,\ -\ {}^9/_8\ R\right) = \frac{81}{4}\ R^2$$

Las tangentes tendrán entonces por ecuaciones $3\left(x \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}\ R\right)^2 \pm$

$$6\sqrt{3}\left(x \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}\ R\right)\left(\eta + {}^9/_8\ R\right) + 9\left(\eta + {}^9/_8\ R\right)$$

$$\left[\sqrt{3}\left(x \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}\ R\right) \pm 3\left(\eta + {}^9/_8\ R\right)\right]^2 = 0$$

los dos puntos dobles tienen tangente única y precisamente en P_1, la recta:

$$x + \sqrt{3}\,\eta + {}^3/_2\,\sqrt{3}\,R = O \quad \text{y en } P_2\text{:} \quad x - \sqrt{3}\,\eta - {}^3/_2\,\sqrt{3}\,R = O$$

Que se trata de cúspides de primera especie se puede ver: o verificando que las tangentes son a contacto triple o con la simple consideración que una cuártica no puede tener dos cúspides de segunda especie o dos tacnodos.

Se puede también verificar fácilmente que los tres puntos cuspidales son vértices de un triángulo equilátero inscripto en el círculo de radio ${}^3/_4\,R$ y centro en el punto $(O, -{}^3/_4\,R)$ y las tres tangentes en los puntos cuspidales son las alturas del triángulo y por lo tanto la curva es simétrica respecto a cada una de las tangentes cuspidales.

Para notar que la curva es toda interior al círculo basta hacer la siguiente consideración:

La curva tiene con el círculo ocho intersecciones de las cuales dos en los puntos cíclicos y las otras seis en los puntos dobles, luego el círculo no puede ulteriormente encontrar la curva. Esta por lo tanto, o es toda interior o es toda exterior al círculo. La segunda posibilidad está excluída por el hecho de que cada tangente cuspidal tiene la intersección con la curva interior al círculo, como se verifica fácilmente.

Análogas consideraciones muestran que la curva es toda interior al triángulo equilátero que tiene por vértices los puntos cuspidales.

ALGUNAS RELACIONES ENTRE LA GEOMETRÍA DEL COMPLEJO DE RECTAS ISÓTROPAS EN EL ESPACIO Y LA GEOMETRÍA DE LOS CÍRCULOS EN EL PLANO

Por el profesor contratado DOCTOR SEVERINO VILLATICO

Deseamos en esta breve nota hacer notar algunas propiedades fundamentales que se obtienen en la representación del espacio sobre el plano.

Hagamos corresponder a un punto (X,Y,Z) del espacio, el círculo, del plano $\pi = (x,y)$, de centro $x = X$ $y = Y$ y radio $r = iZ$.

El cono isótropo de vértice (X,Y,Z) en coordenadas corrientes tiene por ecuación:

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = O$$

y su sección con el plano π, de ecuación $z = O$ es:

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = -Z^2 = r^2$$

esto es el círculo de centro $x = Y$; $y = Y$ y radio $r = iZ$. El centro de tal círculo es la proyección ortogonal del punto sobre π

Viceversa al círculo de centro $\underline{x,y}$ y radio $\underline{r}$ corresponden dos puntos del espacio $x = X$ $y = Y$ $Z = \pm ir$

Si dos puntos pertenecen a una recta isótropa es para ellos:

$$(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_1)^2 = O$$

y sus círculos representativos se tocan en un punto que es la traza de la recta isótropa sobre π. En efecto la tangente común a estos círculos es la traza del plano isótropo, tangente al absoluto, por la recta isótropa.

Esta se presenta pues en un elemento E_1 lineal de η (*).

(*) Si consideramos todas las curvas que salen de un mismo punto O(OO) con un ramo lineal y teniendo allí un contacto de orden k, tales curvas definen un ente geométrico que se indica con el símbolo E_k y llámase *elemento diferencial regular de orden k* y de centro $\underline{O}$. Decir que dos curvas tienen en un punto O un contacto de orden k equivale a decir que las dos curvas tienen en O el mismo E_k. El elemento diferencial E_k de la curva $x = x(t)$ se representa mediante la expresión $x + dx + \frac{1}{2}d^2x + 1/3!\, d^3x + \ldots$ $1/k!d^kx$ que determina el entorno de orden k. Un E_k con centro en O(oo) puede representarse mediante el desarrollo $y = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_k x^k$ en el cual se observa que el E_k depende de $K + 2$ parámetros y por lo tanto los E_k del plano son ∞^{k+2}

Consideremos ahora una curva $\underline{C}$ isótropa y la desarrollable isótropa circunscripta.

NOTA: Para un estudio más profundo ver "Geometria differenziale delle curve" de Bompiani.

Sea $\underline{P}$ el polo de la recta $\underline{p}$, impropia de π, $\underline{A}$ un punto de C, $\underline{a}$ y $\underline{\alpha}$ la $\underline{\text{tangente}}$ y el plano $\underline{\text{osculador}}$ a $\underline{C}$ en A; a_0 la traza del plano $\underline{\text{osculador}}$ sobre π; $\underline{A', a'}$ las proyecciones ortogonales (desde P) de A,a sobre π y $\overline{A}$ el punto $\overline{\text{impropio}}$ de a.

Puesto que $a_0 = \alpha\pi$ su punto impropio está sobre p y sobre la tangente en $\overline{A}$ al absoluto; la recta impropia del plano $\overline{Pa}$ es la PA que es por lo tanto la polar del punto impropio de a_0; es decir a_0 y el plano proyectante de a son perpendiculares y por lo tanto $a_0 \perp a'$.

Sigue que las tangentes a la traza C_0 de la desarrollable isótropa de C sobre π tienen por normales las tangentes a la proyección C' de C. sobre π es decir C, es la evoluta de C_0.

Los puntos de C', entonces son los centros de curvatura de C_0; es decir también los crculos imágenes de los puntos de C son los círculos osculadores a la curva C_0, traza de la desarrollable circunscripta a C.

Consideremos ahora la curva C como envolvente de sus planos osculadores (isótropos). Un plano $UX + VY + WZ + T = O$ es isótropo si y sólo si su recta impropia $UX + VY + WZ = O$ $(T = O)$ es tangente al absoluto $X^2 + Y^2 + Z^2 = O$ $(T = O)$. Esto sucede cuándo y sólo: $U^2 + V^2 + W^2 = O$.

Expresando U,V,W satisfaciendo a tales relaciones, por medio del parámetro $\underline{s}$

$$U = 1 - s^2$$
$$V = i\,(1 + s^2)$$
$$W = 2s$$

El plano isótropo tendrá la ecuación:

$$(1 - s^2)X + i(1 + s^2)Y + 2sZ + T = O$$

Una simple infinidad de tales planos se obtiene poniendo $T = F(s)$ y la curva a la cual ellos osculan está dada por:

$$\begin{aligned}
&(1 - s^2)X + i(1 + s^2)Y + 2sZ + F(s) = O\\
&2sX - 2isY + 2Z + F'(s) = O\\
&2X - 2iY + F''(s) = O
\end{aligned}$$

y resolviendo:

$$\begin{aligned}
X &= 1/4\ (1 - s^2)\ F''(s) + \tfrac{1}{2}sF'(s) - \tfrac{1}{2}F(s)\\
Y &= i/4\ (1 + s^2)\ F''(s) - \tfrac{1}{2}sF'(s) + i/2F(s)\\
Z &= \tfrac{1}{2}F''(s) - \tfrac{1}{2}F'(s)
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones representan la más general curva isótropa, con F(s) arbritaria. Solamente para $F(s) = a + os + cs^2$ se obtiene un punto.

Para concluir, las propiedades fundamentales de la representación del espacio sobre el plano son:

ESPACIO	PLANO
Recta isótropa	E_1
Punto	Círculo
Curva isótropa	Círculos osculadores a una curva

La representación analítica del espacio sobre el plano se obtiene en la forma siguiente:

Una recta está individualizada por s,F,F' por medio de las ecuaciones:

$$(1 - s^2)X + i(1 + s^2)Y + 2sZ + F = O$$
$$2sX - 2isY - 2Z - F' = O$$

Del mismo modo s,F,F' pueden tomarse como coordenadas de un E_1 del espacio.

Si consideramos, por fin, una transformación conforme en el espacio, ella transforma cada recta isótropa en otra recta isótropa, en la representación del espacio sobre el plano le corresponde una transformación que no altera las posiciones de E_1, por lo tanto una transformación de contacto, que cambia círculos en círculos. Existen pues transformaciones de contactos en el plano que cambian círculos en círculos.

NOTA: Para un estudio más extenso del argumento ver "Transformaciones de contacto" de Bompiani.