# PRIMERA PARTE

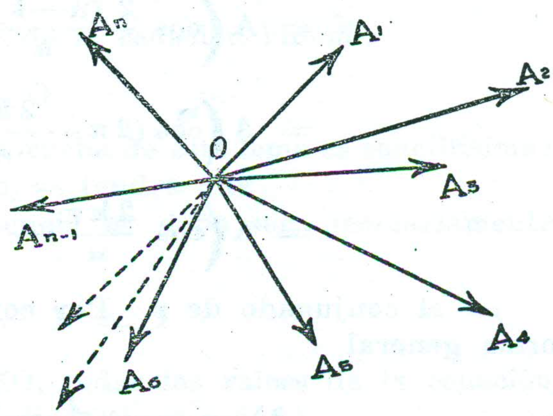
## TRANSFORMACIÓN DE UN GRUPO DE VECTORES ASIMÉTRICOS EN UN SISTEMA DE VECTORES SIMÉTRICOS

**Por el Ingeniero Químico WALTER E. DAUB**

El problema que nos proponemos desarrollar es el siguiente: Dado el sistema de n vectores coplanares concurrentes en O:

$\overrightarrow{OA_1}$ , $\overrightarrow{OA_2}$ , $\overrightarrow{OA_3}$ , $\overrightarrow{OA_4}$ , . . . . . . . . . . . $\overrightarrow{OA_{n-1}}$ , $\overrightarrow{OA_n}$ cuyos módulos designaremos con las letras $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ , . . . . $A_{n-1}$ , $A_n$ y cuyos argumentos designaremos con las mismas letras minúsculas, esto es: $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , . . . . . . . . . $a_{n-1}$ , $a_n$ , respectivamente, cualesquiera, hallar un grupo de sistemas simétricos de vectores concurrentes que sea equivalente al sistema dado, es decir, que tenga la misma resultante.

Entre todas las soluciones posibles, estudiaré el caso particular en que los sistemas equivalentes tengan todos la misma simetría de orden n y, como caso restringido, aquél en que el sistema dado tenga una resultante nula. Se trata de un problema algebraico que se presenta por ejemplo, en Electrotecnia, cuando se aborda el estudio de líneas o máquinas polifásicas funcionando con fases desigualmente cargadas o bajo tensiones desequilibradas.




Sabemos que un sistema simétrico de vectores concurrentes de orden n está formado por n vectores cuyos módulos tienen el mismo valor A, común y cuyos afijos $M_1$, $M_2$, . . . . . . . . . . Mn dividen a la circunferencia de radio r = A en n partes iguales. Tomando uno cualquiera de ellos como origen de fases, los n vectores $M^{(n)}$ estarán dados por los n valores que da la fórmula de De Moivre:

$$(1) \quad M^{(n)} = A \left( \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right)$$

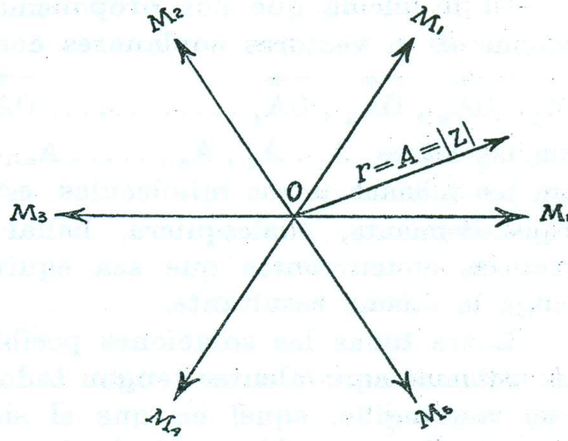
atribuyendo a k n valores enteros consecutivos, generalmente de O a (n-1) inclusive. Que la (1) efectivamente no da más de n valores distintos, a saber los n obtenidos haciendo variar k entre O y (n-1), se puede probar de inmediato. Para ello hagamos a k mayor que n-1, esto es, igual a un múltiplo de n más un número p comprendido entre 0 y n-1:

$$k = \pounds.n + p \qquad \text{Donde } \pounds \text{ es un entero cualquiera,}$$
$$\text{y} \qquad O \leq p \leq (n-1)$$

Tendremos, reemplazando en el argumento de la fórmula de De Moivre:

$$\frac{2\,k\,\pi}{n} = \frac{2p\pi}{n} + 2\pounds\pi$$

y por consiguiente, este argumento no difiere más que en un número entero de circunferencias de aquellos encontrados anteriormente.




Los valores dados por (1) son las raíces de la ecuación binomia:

$$(2) \quad z^n - A^n = O$$

Esta ecuación tiene, como así lo confirma la (1), n raíces distintas. Según la paridad de n, tiene una o dos raíces reales. Si n es impar tiene una, si es par, tiene dos, iguales respectivamente a $+A$ o, en el caso de ser n par, a $+A$ y a $-A$. Las raíces complejas son conjugadas de a pares y se obtienen estos pares dando a k dos valores complementarios a n, esto es k y $(n-k) = k'$. Para probar esto último reemplacemos el valor k' en la (1), teniendo:

$$z' = A\left(\cos\frac{2\,(n-k)\,\pi}{n} + i\ \text{sen}\ \frac{2\,(n-k)\,\pi}{n}\right)$$

$$= A\left(\cos\left(2\pi - \frac{2\,k\,\pi}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(2\pi - \frac{2\,k\,\pi}{n}\right)\right)$$

$$= A\left(\cos\frac{2\,k\,\pi}{n} - i\ \text{sen}\ \frac{2\,k\,\pi}{n}\right) =$$

= al conjugado de z. Por consiguiente, la (1) puede escribirse en la forma general

$$(3) \quad z = A\left(\cos\frac{2\,k\,\pi}{n} \pm i\ \text{sen}\ \frac{2\,k\,\pi}{n}\right)$$

en la que bastará dar a k los valores 0, 1, 2, ....... $\frac{n}{2}$ si n es par y los valores 0, 1, 2, ....... $\frac{(n-1)}{2}$ si fuese n impar.

A los efectos de estudiar con más comodidad las propiedades de estos vectores simétricos, raíces de la ecuación binomia (2), hagamos la substitución

$$z = A\,x$$

siendo A el módulo común de dichos vectores, esto es el número positivo igual al valor aritmético de $\sqrt[n]{A^n}$ con lo cual, después de simplificar tendremos:

$$(4) \quad x^n - 1 = O$$

Vamos a escribir ahora unas cuantas propiedades referentes a las raíces de las ecuaciones binomias, las que harán falta para lo que sigue:

**LEMA a)** Las raíces comunes a las ecuaciones binomias $x^n = 1$ y $x^m = 1$, son también raíces de la ecuación binomia $x^q - 1 = O$, siendo $\underline{q}$ el máximo común divisor de $\underline{m}$ y de $\underline{n}$. Para probar esta aserción recordemos de la divisibilidad de polinomios que, si es q el máximo común divisor de $\underline{m}$ y $\underline{n}$. será $x^q - 1$ el máximo común divisor de los binomios $x^n - 1$ y $x^m - 1$, es decir:

$$(5) \quad \begin{aligned} x^n - 1 &= (x^q - 1)\, P_{n-q}(x) \\ x^m - 1 &= (x^q - 1)\, P_{m-q}(x) \end{aligned}$$

; no teniendo los polinomios de orden (n-q) y (m-q) indicados con las características de función usuales (P con el grado como subíndice) ninguna raíz común. Por consiguiente, las raíces de $x^q - 1 = O$ son las raíces comunes de las ecuaciones binomias consideradas de grados $\underline{n}$ y $\underline{m}$ respectivamente.

**LEMA b)** Toda potencia de una raíz de la ecuación binomia

$$x^n - 1 = O$$

es asimismo raíz de la misma ecuación. La prueba de este lema es sencillísima: Si fuese por ejemplo $\underline{a}$ raíz de la ecuación, se tendrá que $a^n = 1$ ; pero entonces también la potencia $a^p$ debe ser, necesariamente raíz, desde que

$$(a^p)^n = (a^n)^p = 1^p = 1$$

**LEMA c)** Si es $\underline{n}$ un número PRIMO, todas las raíces de la ecuación $x^n - 1 = O$ pueden ser representadas mediante la sucesión.

$a, a^2, a^3, \ldots\ldots\ldots a^{n-1}, a^n$ en que $\underline{a}$ es UNA CUALQUIERA de las raíces de dicha ecuación binomia (para lo que sigue, $\neq \pm 1$)

Vamos a demostrar este lema, que tiene mucha importancia. Por el lema anterior, todos los términos de esta sucesión, son, por ser $\underline{a}$ una raíz cualquiera de la acuación binomia dada por hipótesis, raíces de la ecuación.

Hay que probar rigurosamente que son distintas. Supongamos que no lo fuesen todas, en cuya caso se podría tener

$$a^q = a^r$$

en que $\underline{q}$ y $\underline{r}$ son, como es obvio, enteros positivos comprendidos entre 1 y n.

Supongamos que fuera q el mayor de ambos números. En tal caso, la igualdad anterior puede escribirse de esta manera:

$a^r\ (a^{q-r} - 1) = O$ y, puesto que por hipótesis $\underline{a}$ no es nula, debería ser raíz de la ecuación binomia:

$$(6) \qquad a^{q-r} - 1 = O$$

pero, estando q y r comprendidos entre 1 y n, «a posteriori» se sigue que la diferencia $q - r < n$, razón por la cual, y en virtud del Lema a) las ecuaciones (4) y (6) no pueden tener otra raíz común que la unidad, puesto que por hipótesis habíamos admitido que $\underline{n}$ fuese PRIMO.

**LEMA d)** Si $\underline{n}$ no es un número primo, las potencias de la sucesión: $a, a^2, a^3, \ldots\ldots, a^{n-1}, a^n$ no representarán siempre raíces distintas, siendo $\underline{a}$ una cualquiera de dichas raíces, distinta de $\pm 1$.

Para ello definamos primeramente la raíz primitiva de una ecuación binomia de la forma $x^n - 1 = O$. Llámase raíz primitiva aquella que no satisface simultáneamente a otra ecuación de la forma $x^m = 1$, en que $m < n$.

Sea:

$$x = \cos 2k\pi/n + i \operatorname{sen} 2k\pi/n$$

una raíz de la (4). Si esta raíz lo fuese al mismo tiempo de la ecuación binomia: $x^m - 1 = O$ con $\underline{m}$ menor que $\underline{n}$, debería ser, necesariamente por el teorema de De Moivre.

$$x = \cos 2K\pi/m + i \operatorname{sen} 2K\pi/m$$

y por consiguiente:

$$(7) \qquad \frac{2k\pi}{n} = \frac{2K\pi}{m}$$

igualdad que no puede verificarse sino en el caso de ser:

$$\frac{k}{n} = \frac{K}{m}$$

es decir, en el caso en que la fracción $\frac{k}{n}$ no está reducida a su mínima expresión, sino en que puede reducirse, por simplificación, a la expresión más simple $\frac{K}{m}$ (esta última es más simple por ser $\underline{m}$ menor que $\underline{n}$)

Por consiguiente: Si $\underline{n}$ es primo, todas las raíces de la (4), con la excepción de la unidad, son primitivas. Si $\underline{n}$ no es primo, habrá tantas raíces primitivas como números enteros haya inferiores a $\underline{n}$ y primos con él.

**LEMA e)** Si es $\underline{a}$ una raíz primitiva de:

$$x^n - 1 = 0 \quad \text{, la sucesión}$$

$a, a^2, a^3, \ldots\ldots\ldots\ldots a^n$, representa raíces distintas, CUALQUIERA QUE SEA $\underline{n}$ (Esto es, no importa que sea primo o no lo sea).

La prueba de este lema es también sencilla. Suponiendo que no fueran todas distintas, tendríamos, siendo $q > t$ , $q - t < n$ :

$$a^q = a^t$$

$$y \quad \therefore \quad a^t\,(a^{q-t} - 1) = 0$$ , y, por ser $a \neq 0$, debería ser raíz de la ecuación binomia

$$a^{q-t} - 1 = 0$$

lo cual es imposible, puesto que $q - t < n$ y por hipótesis $\underline{a}$ es una raíz primitiva de $x^n - 1 = 0$.

**LEMA f)** Si m y n son números *primos entre sí,* las raíces de la ecuación binomia:

$$x^{mn} - 1 = 0$$

se obtienen multiplicando todas las raíces de la ecuación binomia $x^n - 1 = 0$ por todas las raíces de la ecuación binomia $x^m - 1 = 0$. Para probar este Lema f), vamos a probar en primer lugar que el producto de dos raíces de cualesquiera de estas dos últimas ecuaciones binomias, es raíz de la:

$$x^{mn} - 1 = 0$$

Seguidamente probaremos que todas las raíces así obtenidas son distintas entre sí. Sean los argumentos de las raíces de $x^m - 1 = 0$ y de: $x^n - 1 = 0$, respectivamente

$$\frac{2p\pi}{m} \quad y \quad \frac{2q\pi}{n} \quad \text{con} \quad \begin{cases} p = 1, 2, 3, \ldots\ldots m \\ q = 1, 2, 3, \ldots\ldots n \end{cases}$$

El argumento de sus productos será:

$$\frac{2\pi\,(qm + pn)}{mn}$$

lo que evidentemente prueba que este argumento es el de una raíz de la ecuación binomia: $x^{mn} - 1 = 0$.

Probaré ahora que los mn productos así obtenidos, son distintos, para lo cual demostraré por reducción al absurdo que no puede haber dos argumentos iguales entre dichos $\underline{mn}$ argumentos. Supongamos que los hubiera, en cuyo caso se tendría:

$$qm + pn = q'm + p'n$$

con $|p' - p| < n$ y $|q' - q| < m$

Esto es: $$\frac{m}{n} = \frac{p' - p}{q - q'}$$

que es un absurdo desde que por hipótesis, $\underline{m}$ y $\underline{n}$ son PRIMOS ENTRE SÍ.

**LEMA** g) de las sucesiones de raíces formadas por potencias enteras y positivas de una raíz primitiva de la ecuación binomia:

$$x^n - 1 = 0.$$

Sean las sucesiones:

$$S_2 = a^2, a^4, a^6, a^8, \ldots\ldots a^{2(n-1)}, a^{2n}$$
$$S_3 = a^3, a^6, a^9, a^{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots, a^{3n}$$

$$S_p = a^p, a^{2p}, a^{3p}, \ldots\ldots\ldots\ldots, a^{pn} \text{ con } p < n$$

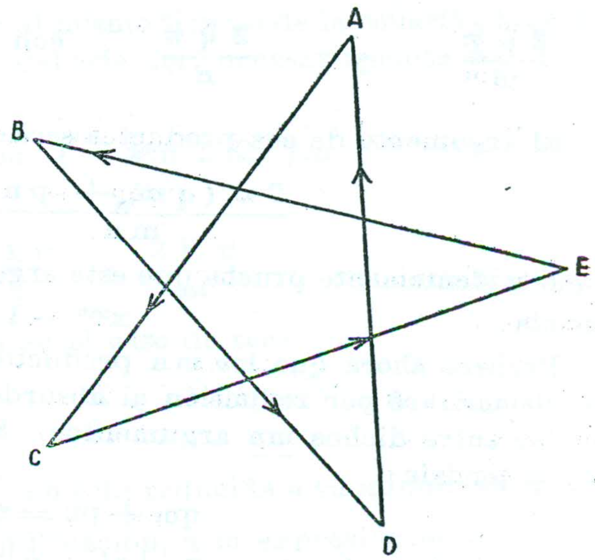
El argumento del término general de la sucesión $S_p$ será evidentemente:

$$\frac{2\,p\,k\,\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1, n)$$

y, para que los términos sean distintos, bastará con que $\frac{p}{n}$ no sea reductible, esto es, que $\underline{p}$ y $\underline{n}$ sean primos entre sí. Si en cambio tuvieran un divisor común $\underline{d}$, tal que $p = dq$ y $n = dm$, tendríamos:

$$\frac{2\,p\,k\,\pi}{n} = \frac{2\,q\,k\,\pi}{m}$$

y por consiguiente $S_p$ no tendría más que m, $<$ n valores distintos y por lo tanto (n-m) de las raíces de $x^n - 1 = 0$ quedarían excluídos de la sucesión $S_p$. Esto es, como se sabe, el problema que se presenta en los polígonos regulares estrellados. Se puede decir, que podemos formar tantas sucesiones $S_p$ en que intervienen todas las raíces de la (4), como números haya inferiores a, y primos con $\underline{n}$. Estas series son las que permiten construir los polígonos regulares estrellados, uniendo p a p las n partes iguales en que se divide previamente la circunferencia, volviendo al punto de partida después de haber pasado una vez por todos los afijos (= puntos de división de la circunferencia).




Así, por ejemplo, el polígono regular estrellado obtenido uniendo dos a dos los puntos afijos A,B,C,D,E es el ACEBDA indicado en la figura de la derecha.

Después de este breve repaso del álgebra clásica de las ecuaciones binomias de módulo unitario, volvamos al problema objeto 1º de nuestra presente monografía. Sean los $\underline{n}$ vectores concurrentes y coplanares cualesquiera

$\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, ....... $\vec{V}_{n-1}$ y $\vec{V}_n$, en que $\underline{n}$ es un entero positivo cualquiera. Sea $q \geq n$ un número primo y $a$ una raíz primitiva de la ecuación binomia $x^q - 1 = 0$. Se podrá siempre formar un sistema equivalente al dado, tal que, indicando esta vez los signos $+$ sumas vectoriales, se tenga:

$$\vec{V}_1 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \dots\dots\dots + \vec{A}_{q-1} + \vec{A}_q = \sum_{k=1}^{k=q} \vec{A}_k.$$

$$\vec{V}_2 = a\,\vec{A}_1 + a^2\vec{A}_2 + a^3\vec{A}_3 + \dots + a^{q-1}\vec{A}_{q-1} + \vec{A}_q = \sum_{k=1}^{k=q} a^k \vec{A}_k$$

.....................................................................................

$$\text{(I)} \quad \vec{V}_{p+1} = a^p\vec{A}_1 + a^{2p}\vec{A}_2 + a^{3p}\vec{A}_3 + \dots + a^{p(q-1)}\vec{A}_{q-1} + \vec{A}_q = \sum_{k=1}^{k=q} a^{pk}\vec{A}_k$$

.....................................................................................

$$\vec{V}_n = a^{n-1}\vec{A}_1 + a^{2n-2}\vec{A}_2 + a^{3n-3}\vec{A}_3 + a^{(n-1)(q-1)}\vec{A}_{q-1} + \vec{A}_q = \sum_{k=1}^{k=q} a^{k(n-1)}\vec{A}_k$$

$$0 = a^n\vec{A}_1 + a^{2n}\vec{A}_2 + a^{3n}\vec{A}_3 + \dots + a^{n(q-1)}\vec{A}_{q-1} + A_q = \sum_{k=1}^{k=q} a^{kn}\vec{A}_k$$

.....................................................................................

$$0 = a^{q-1}\vec{A}_1 + a^{2q-2}\vec{A}_2 + \dots\dots a^{(q-1)2} A_{q-1} + \vec{A}_q = \sum_{k=1}^{k=q} a^{k(q-1)}\vec{A}_k$$

formado por los $n$ vectores dados y $(q-n)$ vectores nulos. En efecto, el determinante principal, formado por los coeficientes de las incógnitas no es nulo, puesto que en cada columna los coeficientes representan los términos de sucesiones $S_p$ distintas, esto es, formados por los mismos valores pero dispuestos de diferente manera en cada columna. Cada columna nos da los componentes de un grupo simétrico y tenemos $(q-1)$ grupos simétricos de orden $q$ (por ser $a^q = 1$ y por consiguiente $a^q\vec{A}_k = \vec{A}_k$) y un grupo monofásico formado por $q$ vectores iguales, $\vec{A}_q$, superpuestos y dirigidos en el mismo sentido, esto es, cuyos argumentos difieren en un múltiplo de $2\pi$. Este sistema lineal se resuelve con tanta mayor facilidad si notamos que la suma de los coeficientes de cada columna, excepto la última, es nula, ya que se sabe que la suma de las raíces de la ecuación

$$x^q - 1 = 0$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots\dots + a^{q-1} = \frac{a^q - 1}{a - 1} = 0 \qquad \text{por ser } a^q - 1 = 0 \text{ y } a \neq 1$$

Por lo visto en el parágrafo que trataba de las sucesiones $S_p$ también son nulas las sumas:

$$1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2(q-1)} = 0$$

$$1 + a^{q-1} + a^{2(q-1)} + \dots + a^{(q-1)^2} = 0$$

Como además puede demostrarse por vía directa, teniendo en cuenta que la suma $1 + a^p + a^{2p} + \ldots\ldots + a^{p(q-1)} = \dfrac{a^{pq} - 1}{a^p - 1}$ por ser la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $a^p$. Ahora bien, por ser $\underline{a}$ una raíz de la ecuación binomia $x^q - 1 = 0$ por hipótesis, será $a^q = 1$ y por lo tanto $a^{pq} = 1^p = 1$, por lo cual la suma anterior es evidentemente nula, como se afirmó.

Multipliquemos ahora la segunda ecuación del sistema (I) por $a^{-1}$, la tercera por $a^{-2}, \ldots\ldots$ y la q-ésima por $a^{-(q-1)}$. Es evidente que en estas condiciones los coeficientes de la primera columna serán todos iguales a la unidad y los coeficientes de las demás columnas ocuparán los puestos correspondientes de las columnas que les preceden inmediatamente. Es lo que se llama una substitución circular. Veamos esto mediante el algoritmo de la sumatoria:

$$\vec{V}_2 \cdot a^{-1} = \sum_{k=1}^{k=q} a^{k-1} \vec{A}_k = \sum_{k=0}^{k=q-1} a^k \vec{A}_{k+1}$$

$$\vec{V}_3 \cdot a^{-2} = \sum_{k=1}^{q} a^{2(k-1)} \vec{A}_k = \sum_{k=0}^{q-1} a^{2k} \vec{A}_{k+1}$$

$$\vec{V}_n\, a^{-(n-1)} = \sum_{k=1}^{q} a^{(k-1)(n-1)} \vec{A}_k = \sum_{k=0}^{q-1} a^{k(n-1)} \vec{A}_{k+1}$$

$$O \cdot a^{-n} = O = \sum_{k=0}^{q-1} a^{kn} \cdot \vec{A}_{k+1}$$

$$O \cdot a^{1-q} = O = \sum_{k=0}^{q-1} a^{k(q-1)} \vec{A}_{k+1}$$

Si admitimos, para mayor uniformidad en la notación sumatoria, que los que los vectores $\vec{V}_{n+1}, \vec{V}_{n+2}, \ldots\ldots \vec{V}_{q-1}$ y $\vec{V}_q$, — (n-q) en total —, sean todos nulos, tendremos, sumando miembro a miembro las igualdades anteriores, incluso la primera del sistema (I):

$$\sum_{k=0}^{k=q-1} \vec{V}_{k+1} \cdot a^{-k} = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} a^{jk} \vec{A}_{k+1} = \sum_{k=0}^{q-1} (\vec{A}_{k+1} \sum_{j=0}^{q-1} a^{jk}) =$$

(desglosando el primer sumando de la sumatoria de índice k) $=$

$$\vec{A}_1 \sum_{j=0}^{q-1} a^{0j} + \sum_{k=1}^{q-1} (\vec{A}_{k+1} \sum_{j=0}^{q-1} a^{jk}) = q\vec{A}_1$$ puesto que,

como hemos visto antes, la suma

$$\sum_{j=o}^{q-1} a^{jk} = O$$ para todo k comprendido entre 1 y $q-1$.

Entonces, a posteriori, es nula la doble sumatoria anterior por serlo cada uno de sus sumandos. Teniendo ahora en cuenta que todos los vectores $\vec{V}_k$ son nulos desde $(n+1)$ hasta q inclusive, podemos escribir, en definitiva:

$$q \cdot \vec{A}_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{V}_k \cdot a^{1-k}$$

Del mismo modo, multiplicando la segunda ecuación por $a^{-2}$, la tercera por $a^{-4}$, . . . . . la última por $a^{-2\,(q-1)}$, tendremos, sumando luego todas miembro a miembro, como hicimos en el caso anterior:

$$q \cdot \vec{A}_2 = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{V}_k \cdot a^{2(1-k)}$$

**(II)**
$$q \cdot \vec{A}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{V}_k \cdot a^{n(1-k)}$$

$$q \cdot \vec{A}_q = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{V}_k$$ (Por ser $a^{q\,(1-k)} = 1$) (para todo k)

Por consiguiente las componentes $\vec{A}_k$ se expresan linealmente en función de los vectores dados, adjuntando la ecuación binomia:

$x^q - 1 = O$ en que $\underline{q}$ es un número primo mayor o igual que n. Si en particular, $\underline{n}$ es un número primo, $n = q$ y tendremos:

**(III)**
$$\vec{A}_p = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \vec{V}_k \cdot a^{p(1-k)}}{n} \qquad (1 \leq p \leq n)$$

en que $\underline{a}$ es una primitiva de $x^n - 1 = O$.

(Léase: La sumatoria dividida por n).

Si $\underline{n}$ no es un número primo, las fórmulas del tipo genérico de la (III) son aún valederas; solamente que aquí los grupos simétricos no tienen todos el mismo orden de simetría n: los grupos son resolubles en otros subgrupos de menor orden de simetría. Un caso de mucho interés en la práctica es aquel en que el sistema de vectores tiene una resultante nula. Es fácil ver, desde luego, que en este caso el término unifásico es nulo. Para probarlo, volvamos a escribir la última ecuación del sistema (II), esto es:

$$q \cdot \vec{A}_q = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{V}_k = O$$ por ser la suma vectorial de todos los vectores del sistema desequilibrado dado igual a la resultante y ser ésta nula por hipótesis. Por consiguiente, deberá ser, necesariamente:

$$A_q = O \quad \text{por ser } q \neq O.$$

y esto es lo que queríamos probar.

Si llevamos los valores de $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \ldots A_q$, dados por el sistema (II), al sistema (I), tendremos las siguientes identidades:

$$\text{(IV)} \qquad q \cdot \vec{V}_p \equiv \sum_{k=1}^{k=q} \left[ a^{(p-1)k} \cdot \sum_{j=1}^{j=n} \vec{V}_j \cdot a^{k(1-j)} \right]$$

Variando $\underline{p}$ entre 1 y $\underline{q}$ inclusive y teniendo siempre en cuenta que para todo $\underline{p}$ mayor que $\underline{n}$, hasta $\underline{q}$ inclusive, los respectivos $\vec{V}_p$ son nulos.

El problema propuesto está, pues, resuelto. Veremos en la segunda parte de este trabajo una aplicación de las identidades (IV) o de las ecuaciones del sistema (I), del cual el (IV) es consecuencia directa, a la resolución de las ecuaciones algebraicas más generales de segundo, tercero y cuarto grados, por un método que así nada tiene de artificioso ni rebuscado, pues es completamente uniforme para todas ellas.

Fin de la primera parte.

WÁLTER E. DAUB
Ingeniero Químico Industrial

En abril del "Año del Libertador General San Martín"
I. T. S. — Bahía Blanca