LIMITACIONES FORMALES EN LAS DEMOSTRACIONES DE EQUIVALENCIA CON EL NUCLEO DE LA ECONOMIA

Fernando Tohmé

Sabido es que existen dos enfoques principales en el análisis de la asignación de recursos:

- La decentralización via precios.
- La cooperación.

Cada uno de estos enfoques lleva a una definición del conjunto de asignaciones deseables en una economía ϵ:

- **Equilibrio**: una asignación $\mathcal{EQ}(\epsilon)$ y un sistema de precios p tal que cada agente recibe su canasta de consumo deseada al sistema de precios y las cantidades demandadas totales igualan a las ofertadas.
- **Núcleo**: el conjunto de asignaciones $\mathcal{COR}(\epsilon)$ que no pueden ser mejoradas por ninguna coalición de agentes.

La relación entre ambas nociones viene dada por un corolario del Primer Teorema de la Economía del Bienestar: $\mathcal{EQ}(\epsilon) \subseteq \mathcal{COR}(\epsilon)$.

Sin embargo, Edgeworth a fines del siglo XIX conjeturó que la relación entre ambas formas de asignar recursos es más fuerte aún:

- *Conjetura de Equivalencia con el Núcleo*: si $n \rightarrow \infty$, entonces $\mathcal{COR}(\epsilon) \rightarrow \mathcal{EQ}(\epsilon)$.

Esta conjetura se mostró reacia a la demostración hasta 1960, aproximadamente. Desde entonces, dos tipos de prueba fueron presentadas para variantes de la misma. Las primeras se debieron al uso de métodos *no-elementales*, esto es, usando técnicas matem'aticas que utilizan herramientas que no son expresables en términos del algebra lineal y el cálculo tradicional. En cierta forma, el entrenamiento que se ganó en estas demostraciones permitió la búsqueda exitosa de pruebas "elementales".

Una breve enumeración de estos resultados es la siguiente:

- **Demostraciones no-elementales:**

  - (*Aumann 1966*): Supone que el conjunto de agentes es $[0,1]$, y utiliza argumentos de la teoría de la Medida.

  - (*Brown-Robinson 1974*): Los agentes tienen dotaciones *infinitesimales* de recursos (que en el agregado dan montos positivos). La herramienta utilizada es al Análisis No-estándar.

- **Demostraciones elementales:**

  - (*Debreu-Scarf 1963*): utilizan una sucesión de economías replicadas.

  - (*Anderson 1978*): usa teoremas de aproximación.

A pesar de que estos resultados están bien establecidos, todos ellos requieren de ciertas variantes del Axioma de Elección (**AC**). Algunos autores encuentran que su uso es excesivo, a la luz del nuevo énfasis en la computabilidad y constructibilidad en matemática aplicada (Lewis 1990).

Para entender esta crítica, veamos primero una serie de definiciones formales que hacen más preciso al problema:

- *Economía* : $\epsilon_n = \{\langle X_i, \preceq_i, w_i\rangle\}_{i=1}^n$,
- *Asignación*: $x \in X_1 \times \ldots \times X_n$. x es *factible* si $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n w_i$,
- el *Núcleo* de ϵ es

$$\mathcal{COR}(\epsilon) = \{\bar{x} \in X : \text{ no existe} S \subseteq \{1, \ldots, n\} \text{ y } x \in X \text{ tal que}$$

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} w_i \text{ y además } \bar{x}_i \preceq_i x_i \text{ para todo } i \in S\},$$

Tenemos que:

Lemma 1 *Si $\bar{x} \in \mathcal{COR}(\epsilon_n)$ existe un sistema de precios p^* tal que:*

- $\sum_{i=1}^n |p^* \cdot (\bar{x}_i - w_i)| \leq 2\mathbf{M}_{\epsilon_n}$.
- $\sum_{i=1}^n |\inf\{p^* \cdot (x_i - w_i) : \bar{x}_i \preceq_i x_i\}| \leq 2\mathbf{M}_{\epsilon_n}$.

Más aún, si tenemos una secuencia de economías $\{\epsilon_n\}_{n>1}$ tal que:

- $\frac{\mathrm{M}_{\epsilon_n}}{n} \to 0.$
- $\sup_n \frac{\max_{k=1\cdots l}\{\sum_{i=1}^{n} w_i^k\}}{n} < \infty.$

con unas pocas condiciones técnicas, incluyendo el Lema anterior, tenemos:

Theorem 1 *(Anderson) Existe una secuencia de precios $\{p_n^*\}_{n>1}$ tal que para todo $S^n \subseteq \{1, \ldots, n\}$:*

$$\frac{\max_{k=1,\ldots,l}\{|\sum_{i\in S^n} \bar{x}_i^j - x_i^j(p_n^*)|\}}{n} \to 0.$$

Este resultado es precisamente el blanco de la crítica de Lewis, quien muestra que la teoría de conjuntos de Zermelo-Frenkel(**ZF**) que constituye la fundamentación usual de la matemática no es suficiente para probar el teorema anterior. Formalmente:

Proposition 1 *(Lewis) Existe un modelo de* **ZF**, *$\mathcal{M}$, en el cual, en las condiciones del Teorema de Anderson, cada secuencia $\{\epsilon_n\}_{n>1}$ es tal que para cada n, $\mathcal{COR}(\epsilon_n)$ es $\emptyset$ o incluye a lo más una única asignación.*

El argumento es que si $|\mathcal{COR}(\epsilon_n)| > 1$, debería existir una función de elección $g : \omega \to \cup_n \mathcal{COR}(\epsilon_n)$, tal que $g(n) \in \mathcal{COR}(\epsilon_n)$. Dado que esto sólo es posible suponiendo el Axioma de Elección, **AC**, y este axioma es independiente de **ZF**, existe un modelo de **ZF** en el cual g no puede ser definido.

Como dijimos más arriba, un problema con **AC** es que no es constructivo. **Pero** en realidad, para alcanzar el resultado de Anderson, sólo es necesario una forma débil del mismo, que es computable, llamado Axiom de Elección Numerable (por sus siglas en ingés: **CC**) que permite elegir un elemento de cada conjunto en una clase numerablemente infinita. Por lo tanto, secuencias no triviales que satisfagan *constructivamente* el Teorema de Anderson pueden ser definidas en **ZF + CC**.

Una fuente más interesante de posibles problemas, no detectado por Lewis, es el uso del Teorema de Minkowski o del Hiperplano Separador en la demostración de Anderson. Este resultado asegura que dos conjuntos convexos pueden ser siempre separados por un hiperplano. Este resultado se suele demostrar apelando al Axioma de Elección, pero en realidad una generalización de **CC**, el axioma de elecciones *dependientes*, **DC** es suficiente, de modo que en **ZF + DC** los resultados de Anderson surgen naturalmente.

Una alternativa para alcanzar los resultados de equivalencia entre el núcleo y la asignación de equilibrio cuando el número de agentes tiende a infinito se obtiene considerando **juegos de mercado**. Una economía

$$\epsilon_n = \{(X_i, u_i, w_i)\}_{i=1}^{n}$$

puede transformarse en el siguiente juego de mercado:

$$\Gamma = \langle \mathbf{I}, A(\mathbf{I}), \mu \rangle$$

,
donde $\mathbf{I} = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de agentes, $A(\mathbf{I}) \subseteq 2^{\mathbf{I}}$ la clase of coaliciones de agentes y $\mu : A(\mathbf{I}) \rightarrow \Re$ es la función de pagos. Para cada coalición $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{I}$, $\mu(\mathbf{S}) = \max_{x^s} \sum_{i \in \mathbf{S}} u_i(x_i^{\mathbf{S}})$, donde $x^{\mathbf{S}} = \sum_{i \in \mathbf{S}} x_i^{\mathbf{S}}$ tal que $\sum_{i \in \mathbf{S}} x_i^{\mathbf{S}} = \sum_{i \in \mathbf{S}} w_i$. Esto es, el pago a la coalición $\mathbf{S}$ es la mejor suma de utilidades que los miembros de la coalición pueden alcanzar redistribuyendo sus dotaciones iniciales.

El núcleo de un juego de mercado Γ es

$$\mathcal{COR}(\Gamma) = \{(\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_n) : \textbf{para todo } \mathbf{S} \in A(\mathbf{I}), \sum_{i \in \mathbf{S}} \bar{\mu}_i \geq \mu(\mathbf{S})\}$$

En $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}$ tenemos que:

Theorem 2 *(Shapley-Shubik) Cada juego de mercado tiene un núcleo no vacío.*

Por otro lado tenemos que:

Proposition 2 *(Lewis) Existe un modelo $\mathcal{M}$ de* $\mathbf{ZF}$ *en el que hay una clase infinita de juegos de mercado $\{\Gamma_n\}_{n<\omega}$, todos los cuales verifican que $\mathcal{COR}(\Gamma_n) = \emptyset$.*

Esquema de demostración: *Consideremos un modelo de* $\mathbf{ZF}$, *$\mathcal{M}$ tal que una medida Υ puede definirse de modo que $\Upsilon(\mathbf{S})$ es 1 ó 0, para cada $\mathbf{S} \subseteq \omega$. Más aún, $\Upsilon(\mathbf{S}) = 0$ para cada conjunto finito $\mathbf{S}$. Entonces, para cada $\mathbf{I}_n$ podemos definir un juego $\langle \mathbf{I}_n, A(\mathbf{I}_n), \mu^n \rangle$, donde μ^n es una restricción Υ sobre $2^{\mathbf{I}_n}$ (i.e. con $\mu(\mathbf{I}_n) = 1$). Entonces el núcleo de cada uno de estos juegos es vacío.* □

A su vez, la existencia de esta medida bi-valuada Υ sobre el algebra de Boole 2^{ω} que se anula sobre todos los conjuntos finitos implica en $\mathbf{ZF}$ que existe un subconjunto no medible de los números naturales.

La introducción del Axioma de Determinación AD, que indica que cada juego bi-personal con infinitas movidas (sobre los números reales) tiene una estrategia ganadora, nos ayuda a encontrar el marco correcto para una prueba de la equivalencia con el núcleo, con un premio extra:

Proposition 3 *En* $\mathbf{ZF}+\mathbf{AD}+\mathbf{DC}$, *dada una secuencia de economías $\{\epsilon_n\}_{n\in\omega}$, en la cual cada una es $\epsilon_n = \{\langle X_i, u_i, w_i \rangle\}_{i=1}^n$, se verifica que :*

- $\sum_{i=1}^n w_i = \mathbf{w}$ *para todo n (i.e. las dotaciones iniciales son las mismas para cada economía en la secuencia).*
- *Para cada par de economías, ϵ_n y ϵ_{n+1} y para cada $i \leq n$, las dotaciones iniciales w_i^n y w_i^{n+1} verifican que $w_i^{n+1} \leq w_i^n$.*
- $\Upsilon(\mathcal{COR}(\epsilon_n)) \rightarrow_n 0$ *en cualquier noción de medida Υ adecuada para espacios Euclideos.*

Entonces, a cada ϵ_n le corresponde un juego de mercado Γ_n, con un núcleo no vacío, tal que la secuencia de juegos de mercado $\langle \Gamma_n \rangle_{n<\omega}$, converge a un juego límite $\Gamma^* = \langle \omega, A(\omega), \mu \rangle$ en el cual $\mathcal{COR}(\Gamma^*)$ es un singleton $\{(\bar{\mu}_i)_{i\in\omega}\}$ y existe una asignación x^* que verifica para cada i $u_i(x_i^*) = \bar{\mu}_i$. Esta asignación es de equilibrio para una economía competitiva ϵ^*, que es el límite de $\{\epsilon_n\}_{n\in\omega}$.

Este resultado muestra que en **ZF+AD+DC** cada economía con un número infinito de agentes es en realidad equivalente a una economía finita. Contra el resultado clásico de Kirman y Sondermann, encontramos en el area de *Social Choice* un resultado similar:

Proposition 4 *En* **ZF + AD + DC**, *sea una sociedad* $\mathcal{S} = \langle \mathbf{S}, \mathbf{X}, \{\preceq_i\}_{i\in\mathbf{S}} \rangle$, *donde* **S** *es el conjunto de agentes,* **X** *el de opciones y* $\preceq_i$ *es un orden reflexivo, antisimétrico, transitivo y completo de* **X**. *Supongamos que* **S** *es numerable. Entonces, sea* $\preceq_\mathbf{S}$ *una preferencia social que verifica las condiciones del Teorema de Arrow. Entonces existe un* $i \in \mathbf{S}$ *(el* dictador*) tal que* $\preceq_i \equiv \preceq_\mathbf{S}$.

Esto muestra que el problema de equivalencia con el núcleo es elementalmente resoluble apelando al axioma de determinación, que permite que la distinción finito-infinito en los modelos económicos desaparezca. Es decir, los modelos económicos arrojan los mismos resultados sin importar el tamao de la economía. Más aún, todos estos resultados son computables, lo que significa que la mayor parte de las críticas al "realismo" de la teoría económica basadas en lo excesivas de las habilidades cognitivas supuestas de los agentes, dejan de tener sentido en este marco.

Referencias

- Anderson, R.: "An Elementary Core Equivalence Theorem", *Econometrica* **46**:1483-1487, 1978.
- Anderson, R.: "Core Theory with Strongly Convex Preferences", *Econometrica* **49**: 1457-1458, 1981.
- Arrow, K.: *Social Choice and Individual Values*, Wiley and Sons, New York, 1951.
- Arrow, K. - Hahn, F.: *General Competitive Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1971.
- Aumann, R.: "Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders", *Econometrica* **34**: 1-17, 1966.
- Brown, D. - Robinson, A.: "Nonstandard Exchange Economies", *Econometrica* **43**: 41-55, 1975.
- Debreu, G.- Scarf, H.: "A Limit Theorem on the Core of an Economy", *International Economic Review* **4**: 236–246, 1962.
- Hildenbrandt, W.: *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton

University Press, Princeton NJ, 1974.

- Jech, T.: *Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- Just, W. - Weese, M.: *Discovering Modern Set Theory* **Vol. I**, American Mathematical Society, Providence RI, 1996.
- Kirman, A. - Sondermann, D.: "Arrow's Theorem, Many Agents and Invisible Dictators", *Journal of Economic Theory* **5**: 267-277, 1972.
- Lewis, A.: "On Effectively Computable Realizations of Choice Functions", *Mathematical Social Sciences* **10**: 43-80, 1985.
- Lewis, A.: "On the Independence of Core-Equivalence Results from Zermelo-Fraenkel Set Theory", *Mathematical Social Sciences* **19**: 55-95, 1990.
- Mirowski, P.: *Machine Dreams: Economics Becoms a Cyborg Science*, Cambridge University Press, Cambridge MA, 2002.
- Mycielski, J.: "Games with Perfect Information", in Aumann, R. - Hart, S. (eds.) *Handbook of Game Theory* **Vol. I**, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- Shapley, L. - Shubik, M.: "On Market Games", *Journal of Economic Theory* **1**: 9-25, 1969.