

FORMACION DE REDES DIRIGIDAS CIRCULARES CON COSTOS DE ENLACE COMPARTIDOS

*Juan Manuel Larrosa
Fernando Tohmé*

INTRODUCCION

La interacción entre agentes puede ser representada en diversas formas. Una manera de representar los intercambios directos que ha atraído mucho interés en los últimos años es a través de las *redes*. Dado que tiene una representación gráfica sencilla, esta herramienta de análisis fue primeramente adoptada en la sociología y antropología. Para los expertos de esas áreas constituye una forma gráfica de entender la influencia de los entornos de agentes sobre las conductas individuales. Basados en el estudio de las redes sociales reales, los sociólogos y antropólogos han acumulado una vasta evidencia que ayuda a entender cómo el comportamiento humano es condicionado por el comportamiento de otros agentes.

En términos matemáticos, una red es un grafo, donde los nodos representan agentes individuales y los arcos o enlaces se interpretan como un "bien de utilidad" (por ejemplo, información, prestigio personal, etc.) que se intercambia (véase Wasserman y Faust, 1994). La literatura económica introdujo recientemente herramientas de teoría de juegos en este marco de análisis. En vez de interesarse sólo en los aspectos descriptivos, algunos teóricos de la Economía han encarado el estudio de cómo se forman las redes, en primer término y luego de sus condiciones de estabilidad y eficiencia (Jackson y Wolinsky, 1996; Bala y Goyal, 2000; Dutta y Jackson, 2000). El enfoque de redes basado en la teoría de los juegos presenta dos corrientes principales: una basada en juegos cooperativos y la otra en estrategias. El análisis basado en juegos cooperativos, como es usual en este de enfoque, estudia el problema de formación de coaliciones entre agentes. El exigente supuesto transferencia de utilidad entre agentes es difícil de justificar en muchos casos, además de ser computacionalmente costoso (Qin, 1996; Dutta, et al, 1998; Slikker y van den Nouweland, 2001).

A su vez el enfoque estratégico o no cooperativo, sólo requiere de la definición de estrategias disponibles para los agentes así como de la caracterización de las correspondientes funciones de pagos. Dado cierto protocolo o regla de interacción, los agentes deciden si se conectan o no a la red, evaluando los beneficios de conexión (o desconexión) con otros agentes. Las decisiones racionales de los agentes llevan a equilibrios de Nash, las cuales dan lugar a las redes de este análisis.

Tal como fue mencionado, una red puede ser vista como un grafo. Una decisión importante de modelización es la de si el grafo va a ser *dirigido* o *no dirigido*. Esta elección de primitivas tiene consecuencias también para los resultados de equilibrios en juegos no cooperativos de formación de redes. Los grafos no dirigidos son útiles para representar situaciones en las cuales la dirección de los flujos de bienes de utilidad es menos importante o irrelevante (Dutta y Mutuswami, 1997). Por otro lado, los grafos dirigidos reflejan la importancia de distinguir cuál agente ha iniciado la conexión así como qué dirección ha tomado el flujo de información. Una convención común es trazar los enlaces dirigidos con flechas dirigidas hacia el agente que decidió iniciar la conexión (Bala y Goyal, 2000; Dutta y Jackson, 2001).

En este trabajo se diseñan redes como grafos con flujos dirigidos. Llamando 'información' (en un uso más bien genérico del término) al bien de utilidad que circula en las redes. A cada agente se le asigna alguna cantidad de información, pero tiene una función de pagos que depende positivamente del monto de información a la cual tiene acceso. Estableciendo enlaces con otros, el agente puede adquirir la información pero tiene que compartir el pago del gasto de información. Esta es una forma de representar el hecho frecuente en que la información obtenida indirectamente requiere, de todos modos, de una cierta cantidad de colaboración con la fuente, para incentivarla a seguir proveyéndola. El enfoque de costo compartido aplicado en este trabajo supone que cada agente paga una pequeña tarifa por cada enlace en el sendero que le permite alcanzar la información deseada. El problema es determinar cuál estructura puede emerger como equilibrio estratégico entre los agentes y si además ésta es óptima o no. Se ha podido establecer aquí que los equilibrios estrictos de Nash o equilibrios de Nash con el mínimo número de enlaces dan lugar a una red circular, la cual es estable y óptima.

El problema de formación de redes estudiado aquí puede ser observado en distintas situaciones. Así, por ejemplo, considérese el siguiente escenario: supongamos que los usuarios de Internet son tarifados en un pequeño monto por

cada enlace que visita un sitio web, paga dicha tarifa. Si alguno de ellos sigue un link tiene que pagar por la nueva conexión pero accede a mayor información. Si a su vez sigue un link en este sitio accede al nuevo sitio pagando de nuevo la tarifa pero accediendo a mayor información. La pregunta es: ¿cuál es la manera más eficiente de navegar por una serie de sitios bajo esta estructura de costos?

Más cercano a este marco de estudio, podría preguntarse qué clase de arquitectura para una red de área local (LAN – Local Area Network) incrementa la velocidad de flujo a la vez que reduce las pérdidas. Esto es en efecto análogo a nuestro problema genérico: una computadora particular en la LAN podría necesitar recurrir a los recursos de otra computadora en la red. Debería existir un protocolo eficiente para elegir a qué máquina conectarse. Al mismo tiempo hay que pagar una pequeña 'tarifa' (en términos de tiempo de procesamiento, por ejemplo) para alcanzar la máquina que le proporciona la mayor cantidad de recursos. Dado que esto es cierto para todas las PC de la red, el resultado estratégico tiene que permitir a todas alcanzar la mayor cantidad de información disponible, pagando lo menos posible. Como en nuestro resultado (si bien por razones tecnológicas) el resultado final podría ser una red circular como en el caso de la arquitectura *Token Ring* de IBM (Tanenbaum, 1989).

Tal situación se presenta en diversas organizaciones sociales, por ejemplo en los comités multidisciplinarios de evaluación. Estos están constituidos por expertos en diferentes campos. Cada uno debe confiar en otros para obtener información acerca de áreas en las que no es experto. La red circular, en este caso, minimiza el número de preguntas mientras al mismo tiempo maximiza la información disponible para todos.

A continuación (sección 2) se presenta el modelo. En la sección 3 se determina la arquitectura de equilibrio mostrando también cómo los equilibrios verifican algunos criterios de estabilidad y optimalidad. La sección 4 discute las analogías y diferencias con el trabajo original de Bala y Goyal. Finalmente, en la sección 5 se realiza una pequeña evaluación de los resultados reportados aquí.

EL MODELO

Sea $N = 1, \dots, n$ un conjunto de agentes. Para evitar resultados triviales se supondrá que $n \geq 3$. Si i y j son dos miembros típicos de N , un enlace entre ellos, sin intermediarios, originado en i y finalizado en j será representado como ij . La

interpretación de ij es que i establece un contacto con j que permite a i tener acceso a la información de j así como a su red de contactos. Cada agente $i \in N$ tiene alguna información de su propiedad, $I_i \in Z_+$ (es decir, representado como un entero positivo). Como se mencionó, i puede acceder a más información formando enlaces con otros agentes. La formación de redes es costosa en tiempo, recursos y esfuerzos, pero por simplicidad supondremos que el enlace ij tiene un costo de 1 (en unidades de utilidad de información). Por convención, se supone que la información de cada agente es lo suficientemente valiosa como para que valga la pena establecer un enlace con ella, es decir que $I_i > 1$.

Los agentes tratarán de maximizar la utilidad de la información disponible así como minimizar el costo de conexión con otros agentes. Para lograr esto, escogerán una dentro de un conjunto de estrategias. Cada estrategia para $i \in N$ es un vector $g_i = \langle g_{i,1}, \dots, g_{i,i-1}, g_{i,i+1}, \dots, g_{i,n} \rangle$ de $(n-1)$ dimensiones donde cada $g_{i,j}$ para $j \neq i$ vale 0 ó 1. Esto es interpretado como que i establece un enlace directo con j si $g_{i,j} = 1$ mientras que si $g_{i,j} = 0$ dicho enlace no existe. El conjunto de todas las estrategias se denota como G_i . El análisis se restringe nuestro análisis a los casos de estrategias puras, lo cual implica que $|G_i| = 2^{n-1}$. Finalmente, $G = G_1 \times \dots \times G_n$ denota el conjunto de perfiles de estrategias en la interacción entre los agentes de N .

La existencia de un enlace directo ij indica una comunicación asimétrica entre i y j . Esto es, $g_{i,j} = 1$ indica que i ha establecido una comunicación con j que le permite acceder a la información de j pero no viceversa (la simetría entre i y j es restablecida si $g_{j,i} = 1$). Las estructuras con esta característica son denominadas redes de flujo dirigido.

En estas redes el perfil de estrategias puede ser representado como un grafo dirigido $g = (g_1, \dots, g_n)$ sobre N . Esto es, en el grafo dirigido los elementos de N son los nodos mientras que cada enlace establecido como $g_{i,j} = 1$ es representado por una flecha empezando en j direccionada a i (esto es para representar la idea que cuando i establece un enlace con j , la información fluye de j hacia i). Esto es, las flechas siempre se orientas hacia el agente que establece el enlace. Se sigue inmediatamente que:

Proposición 1: *Existe una relación biyectiva entre los grafos dirigidos entre n nodos y los perfiles de estrategias en G .*

Prueba: Un grafo dirigido con n nodos es tal que para cada nodo i existe como máximo una flecha entrante de cada $j \neq i$ (y ninguna desde él mismo). Entonces,

para cada j define $g_{i,j}$ igual a 1 si existe una flecha entrante desde j y 0 si no. Esto define a $g_i = \langle g_{i,1}, \dots, g_{i,i-1}, g_{i,i+1}, \dots, g_{i,n} \rangle$ para cada $i \in N$ y un $g = \langle g_1, \dots, g_i, \dots, g_n \rangle \in G$. Del mismo modo, dado un g , un grafo dirigido puede obtenerse añadiendo una flecha desde j hacia i si $g_{i,j} = 1$. Dado que $g_{i,i}$ no está definido, el grafo carece de ciclos y dado que $g_{i,j}$ tiene solo dos valores posibles, existe uno o cero enlaces entre ellos.

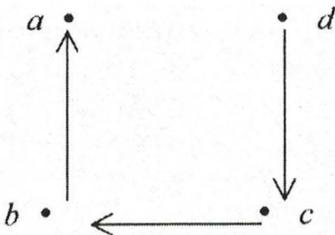
Ejemplo 1. Dado un grupo de cuatro agentes, $N = \{a, b, c, d\}$, una estrategia conjunta $g = \langle g_a, g_b, g_c, g_d \rangle$ puede ser representada como un perfil de estrategias (Tabla 1).

Cada fila es la estrategia elegida por uno de los agentes. Las columnas corresponden a los agentes. Una entrada 1 en la fila i y columna j significa que la estrategia del agente i prescribe establecer un enlace con el agente j . Las entradas en la diagonal principal se señalan con cruces dado que los agentes no pueden establecer enlaces con ellos mismos. En la Figura 1 podemos ver el grafo dirigido que se corresponde con g .

Tabla 1
Perfil de estrategias

Estrategia	a	b	c	d
g_a	X	1	0	0
g_b	0	X	1	0
g_c	0	0	X	1
g_d	0	0	0	X

Figura 1
Red formada por el perfil de estrategias



Se define $N^{g_i} = \{k \in N \mid g_{i,k} = 1\}$ como el conjunto de agentes con quienes i establece un enlace directo de acuerdo a su perfil de estrategias g_i . Existe un sendero desde j hacia i de acuerdo al $g \in G$ si existe una secuencia de agentes diferentes (para evitar que aparezcan ciclos) j_0, \dots, j_m (con $i = j_0$ y $j = j_m$) tal que $g_{j_0, j_1} = \dots = g_{j_{m-1}, j_m} = 1$. Dada una estrategia conjunta g , tenemos que $j_1 \in N^{g_{j_0}}$, $j_2 \in N^{g_{j_1}}$, ..., $j_m \in N^{g_{j_{m-1}}}$. Un sendero desde $j = j_m$ hacia $i = j_0$, denotada como $j \xrightarrow{g} i$, tiene una *longitud*, la cardinalidad de la secuencia $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}, j_m$, es decir m , el cual indica el número de enlaces intermedios entre j e i . Nótese que un enlace dirigido es un sendero de longitud 1.

Ejemplo 1. Reformulación. Dada la estrategia $g = \langle g_a, g_b, g_c, g_d \rangle$, con $N^{g_a} = \{b\}$, $N^{g_b} = \{c\}$ y $N^{g_c} = \{d\}$ mientras que $N^{g_d} = \emptyset$. Esta secuencia establece un sendero desde d hacia a de longitud 3.

Se denota al conjunto de agentes accedidos (directamente o no) por i como $N^{i;g} = \{k \in N \mid k \xrightarrow{g} i\} \cup \{i\}$. Se incluye a i en $N^{i;g}$ para indicar que i conoce su propia valuación, a pesar del hecho mencionado anteriormente de que i no establece un enlace directo consigo mismo. Sea $\mu_i : G \rightarrow \{0, \dots, n \times (n-1)\}$ el número de enlaces en todos los senderos que finalizan en i , originados por agentes en $N^{i;g}$ bajo cualquier estrategia conjunta:

$$\mu_i(g) = |\{(j, k) \in N \times N \mid g_{j,k} = 1, \text{ y } \exists l \in N^{i;g} \text{ y } l \xrightarrow{g} i \text{ con } j, k \in l \xrightarrow{g} i\}|$$

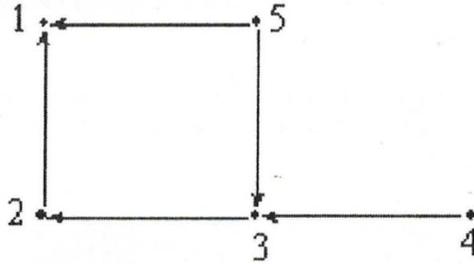
Nótese que puede haber mas de un sendero desde j hacia i .

Ejemplo 2. Se supone ahora que $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la estrategia $g = \langle g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \rangle$ dado por la Tabla 2.

Tabla 2. Perfil de estrategias

Estrategia	1	2	3	4	5
g_1	X	1	0	0	0
g_2	0	X	1	0	0
g_3	0	0	X	1	1
g_4	0	0	0	X	0
g_5	0	0	0	0	X

Figura 2. Red formada por el perfil de estrategias



La Figura 2 muestra la red correspondiente. Donde $N^{1:g} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N^{2:g} = \{2, 3, 4, 5\}$, $N^{3:g} = \{3, 4, 5\}$, $N^{4:g} = \{4\}$ y $N^{5:g} = \{5\}$. Esto es, bajo g el agente 1 accede a la información de todos los agentes mientras que 4 y 5 sólo acceden a su propia información. Los números de enlaces requeridos para obtener la información son $\mu_1(g) = 5$, $\mu_2(g) = 3$ y $\mu_3(g) = 2$, mientras que $\mu_4(g) = \mu_5(g) = 0$.

Para convertir este esquema en un juego se definen los pagos de los agentes. Supondremos que $\Pi_i : G \rightarrow R$, la función de pagos para el agente i , es:

$$\Pi_i(g) \equiv \sum_{j \in N^{i:g}} I_j - \mu_i(g) \tag{1}$$

Esto es, los pagos de i son la suma de toda la información a la que puede acceder, menos el costo de los senderos que le llegan, establecidos de acuerdo a g (recuérdese que cada enlace tiene costo unitario). La intuición aquí es que i obtiene un pago por acceder a mayor información pero al mismo tiempo tiene que pagar un cargo o arancel por cada uno de los enlaces en los senderos hacia las fuentes de información.

Ejemplo 2. Primera reformulación. Se supone que la información obtenida por los agentes es: $I_1 = 2$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$, $I_4 = 3$ y $I_5 = 3$. Entonces, bajo la estrategia g resulta que

$$\begin{aligned} \Pi_1(g) &= I_1 + \dots + I_5 - \mu_1(g) = 2 + 2 + 4 + 3 + 3 - 5 = 9 \\ \Pi_2(g) &= I_2 + \dots + I_5 - \mu_2(g) = 2 + 4 + 3 + 3 - 3 = 9 \\ \Pi_3(g) &= I_3 + \dots + I_5 - \mu_3(g) = 4 + 3 + 3 - 2 = 8 \\ \Pi_4(g) &= I_4 - \mu_4(g) = 3 - 0 = 3 \\ \Pi_5(g) &= I_5 - \mu_5(g) = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

Podemos notar que, por ejemplo, si $g_{1,5} = 0$, el agente 1 podría mejorar su pago (es decir, obtener 10 en vez de 9) dado que tendría todavía acceso a I_5 pero usando un enlace menos.

Para cada $g \in G$, el agente i obtiene una estructura $N^{i:g}$ y su pago depende críticamente del tipo de grafo que corresponda a $N^{i:g}$ como se resume en la siguiente proposición:

Proposición 2. *Dadas dos estrategias conjuntas g y g' , $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$ si y solo si los correspondientes grafos $N^{i:g}$ y $N^{i:g'}$ son tales que:*

$$\sum_{j \in N^{i:g}} I_j - \sum_{j \in N^{i:g'}} I_j \geq \mu_i(g) - \mu_i(g')$$

Prueba: Trivial

Este resultado ayuda a comprender la presunción de que el objetivo de un agente racional es el de obtener tanta información como sea posible, atravesando la menor cantidad de enlaces posibles. Existen dos casos de particular interés:

- $\sum_{j \in N^{i:g}} I_j = \sum_{j \in N^{i:g'}} I_j$ y $\mu_i(g) \leq \mu_i(g')$,
- $\sum_{j \in N^{i:g}} I_j \geq \sum_{j \in N^{i:g'}} I_j$ y $\mu_i(g) = \mu_i(g')$.

La primera condición muestra que $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$ si la información obtenida a través de g es la misma que la obtenida por g' pero el número de enlaces requeridos es menor en g que en g' . El segundo caso muestra que $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$ si el número de enlaces requeridos para alcanzar la información es la misma en g que en g' pero la cantidad de información obtenida en g es mayor a la que alcanza en g' .

EQUILIBRIO Y OPTIMALIDAD

Dada una red $g \in G$ (de acuerdo a la proposición 1 corresponde a una estrategia conjunta g con su grafo dirigido correspondiente), sea g_{-i} el grafo dirigido que se obtiene cuando se suprimen todos los enlaces directos del agente i . Entonces, g puede ser escrito como $g = (g_i, g_{-i})$, significando que g esta formada por la

unión de los enlaces de g_i y aquellos de g_{-i} . Una estrategia g_i se dice *mejor respuesta* del agente i a g_{-i} si

$$\Pi_i(g_i, g_{-i}) \geq \Pi_i(g'_i, g_{-i}) \tag{2}$$

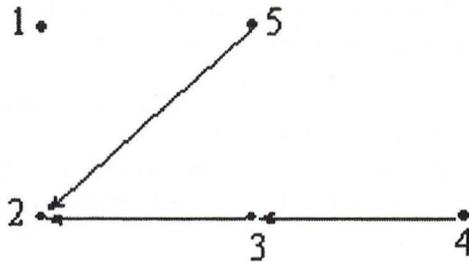
para todo $g'_i \in G_i$.

Ejemplo 3: Considérese otra vez el caso de $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde $I_1 = 2$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$, $I_4 = 3$ y $I_5 = 3$. Sea g_{-1} descrita por la *Tabla 3*. Asimismo véase la *Figura 3* para la situación enfrentada por 1.

Tabla 3. Perfil de estrategias

Estrategia	1	2	3	4	5
g_2	0	X	1	0	1
g_3	0	0	X	1	0
g_4	0	0	0	X	0
g_5	0	0	0	0	X

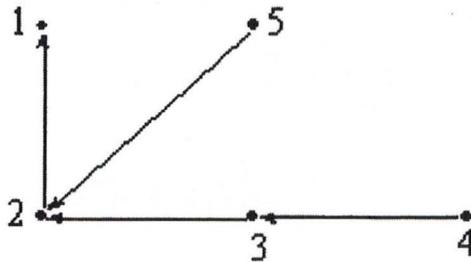
Figura 3. Red formada por el perfil de estrategias



El agente 1 tiene que decidir con quién establecer una conexión. Una posibilidad es la de permanecer aislado, pero eso sólo le daría un pago de 2. Alternativamente, podría conectarse a la cantidad de agentes que desee. Pero algunas conexiones podrían ser redundantes en términos de ganancias por información. Tal redundancia, a su vez, significaría un mayor costo para la misma información. Así, por ejemplo, conectarse a 3 y 4 aseguraría a 1 el tener acceso a la información mantenida por ellos. El número de enlaces requeridos sería de 3. El pago entonces

sería de $2 + 4 + 3 - 3 = 6$. Podría, en cambio, conectarse solamente a 3, dado que aún recibiría la información de 3 y 4 pero sólo requeriría de 2 enlaces, es decir su pago sería de $2 + 4 + 3 - 2 = 7$. Puede deducirse que la mejor respuesta para 1 sería la de conectarse sólo al agente con el mayor pago bajo g_{-1} . Esto es, al agente 2, el cual tiene un pago de $2 + 4 + 3 + 3 - 3 = 9$. Entonces, 1 alcanzará la información de 2, 3, 4 y 5, requiriendo 4 enlaces. Esto es, su pago sería de 10. La *Figura 4* muestra la red resultante.

Figura 4. Red final formada por el agente 1



El conjunto de las mejores respuestas a g_{-i} es $MR_i(g_{-i})$. Una red $g = (g_1, \dots, g_n)$ se dice una *red de Nash* si para cada i , $g_i \in MR_i(g_{-i})$, es decir g (como una estrategia conjunta) es un equilibrio de Nash. Para determinar la estructura de las redes de Nash se presentan algunas definiciones que permitirán describir propiedades adicionales de las redes.

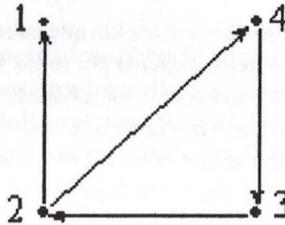
Dada una red g , un conjunto $C \subset N$ es llamado *componente* de g si para cada par de agentes i y j en C ($i \neq j$) existe $j \in N^{i:g}$ y no existe un C' , $C \subset C'$, para el cual esto es cierto. Un componente C se dice *mínimo* si C no es más componente una vez que $g_{i,j} = 1$ entre dos agentes i y j en C se interrumpe, es decir si $g_{i,j} = 0$.

Ejemplo 4. Dado $N = \{1, 2, 3, 4\}$, considérese la siguiente red, representada en la *Tabla 4* y en la *Figura 5*.

Tabla 4. Perfil de estrategias

Estrategia	1	2	3	4
g_1	X	1	0	0
g_2	0	X	1	0
g_3	0	0	X	1
g_4	0	1	0	X

Figura 5. Red formada por el perfil de estrategias



Claramente $C = \{2, 3, 4\}$ es un componente, dado que $N^{2;g} = N^{3;g} = N^{4;g} = \{2, 3, 4\}$ y si se considera a $N = C \cup \{1\}$, N no es un componente, dado que 1 no pertenece a $N^{2;g}$, $N^{3;g}$ o $N^{4;g}$. Por otro lado, C es mínimo dado que si se interrumpe cualquiera de los enlaces 23, 34 ó 42 alguno de los agentes deja de ser alcanzable para al menos un agente en C . De este modo, por ejemplo, si 23 es cortado, en la nueva red g' , $N^{2;g'} = \{2\}$.

Una red se dice *conectada* si tiene un único componente. Si ese único componente es mínimo, g se dice *minimamente conectada*. Una red no conectada se dice *desconectada*. Una instancia particular de las redes minimamente conectadas es la red *circular*, en la cual los agentes pueden ser etiquetados (por medio de una función $l: N \rightarrow N$) como $\{l(1), \dots, l(n)\}$ y $g_{l(1),l(2)} = g_{l(2),l(3)} = \dots = g_{l(n-1),l(n)} = g_{l(n),l(1)} = 1$ y no hay otros enlaces.

Con todos estos elementos, se puede establecer el siguiente resultado (todos los resultados en esta sección corresponden al juego $\langle N, G, \Pi \rangle$, donde $\Pi = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_n$):

Lema 1: Si g^* es una red estricta de Nash, entonces es circular.

Prueba: Consideremos a $\Pi_i : G \rightarrow Z$, para cada $i \in N$ y un equilibrio de Nash estricto $g^* \in G$. Entonces, para cada i y cada $g_i \in G_i$,

$$\Pi_i(g_i^*, g_{-i}^*) > \Pi_i(g_i, g_{-i}^*) \quad (3)$$

Se considera que g^* define una red circular. Si es así, recordemos que, por la Proposición 2, debe cumplirse para cada i que (véase la Prueba 1)¹:

$$\Pi_i(g^*) = \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (4)$$

En palabras: el máximo de información que puede ser alcanzado en una red circular es la suma de la información poseída por todos los agentes mientras que el número de enlaces que permitirían hacer disponible esta información a *cualquiera* de ellos sea $n-1$. Nótese que una estructura en la cual existe sólo un sendero entre cualquier par de agentes tendría sólo n enlaces (véase la Prueba 2)².

Supongamos, por contradicción, que g^* no es circular. Esto significa que para al menos un agente i ,

$$\Pi_i(g^*) \neq \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (5)$$

¹ El pago es mejor que el aislamiento. Considérese un agente i tal que $I_i > I_j$ para cada $j \neq i$. El pago de los agentes aislados es, para cada i , precisamente I_i . Supongamos por contradicción que $I_i + \sum_{j \neq i} I_j - (n-1) \leq I_i$. Entonces $\sum_{j \neq i} I_j \leq n-1$, pero como $I_j > 1$ para cada j , $\sum_{j \neq i} I_j > n-1$. Absurdo.

² Una simple prueba por inducción muestra esto. Supongamos que $N = \{i, j\}$. Entonces, si i tiene acceso a j y j a i , $|N|$ son los enlaces requeridos. Vamos a suponer que la afirmación es válida para $|N| = n-1$. Si $|N| = n$ consideremos un subconjunto $N' \subset N$, $N = \{i\} \cup N'$. Dado que $|N'| = n-1$, todo los elementos en N' pueden ser conectados con $n-1$ enlaces. Para conectar i a cada elemento de N' en tal forma que cada agente en N' tenga acceso a i , solo considérese dos agentes en N' , j_1 y j_2 , tal que la longitud del sendero de j_1 a j_2 sea $n-2$. Entonces, la longitud del sendero de j_2 a j_1 es 1. Eliminando este enlace simple y sustituyéndolo por otros dos enlaces: uno desde j_2 hacia i y el otro desde i hasta j_1 . De este modo, i tendrá acceso a todos los agentes en N' y cada agente en N' tendrá acceso a i . El número de enlaces es entonces $(n-1) - 1 + 2 = n$. Por ello, la afirmación es válida para cada $n > 0$.

Considérese en primer término el caso en el cual:

$$\Pi_i(g^*) > \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (6)$$

Dado que $\sum_{j \in N} I_j$ no puede ser mejorado, la única posibilidad es que el número de enlaces sea menor, es decir $\Pi_i(g^*) = \sum_{j \in N} I_j - k$, donde $k < n - 1$. Pero aparece una contradicción por el hecho que $k \not\leq (n-1)$ dado que de otro modo i no sería capaz de acceder a por lo menos un agente j y entonces tampoco podría obtener beneficio de su información I_j .

Consideremos ahora el caso en el cual:

$$\Pi_i(g^*) < \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (7)$$

el cual puede ocurrir si i no tiene acceso a por lo menos un agente (digamos j) o si el número de enlaces en los senderos hacia la información adquirida por i es mayor que $n - 1$. Considérese el primer caso, esto es, que existe un j que no es accedido por i . Entonces, i puede seleccionar una estrategia $g_i \in G$ tal que $g_{i,j} = 1$. Entonces, el número de enlaces se incrementa en 1 mientras que la información accedida se incrementa en $I_j > 1$. Esto es, $\Pi_i(g_i, g_{-i}^*) > \Pi_i(g^*)$. De este modo se concluye en un absurdo dado que g^* es un equilibrio estricto de Nash.

Por otro lado, si el número de enlaces en el sendero que brinda información a i es mayor que $n - 1$, i recibe la información de al menos un agente j , I_j , en una forma redundante. Esto implica que existe un agente k (el cual puede ser el mismo i) tal que k recibe información de j tanto por un enlace directo, $g_{k,j}^* = 1$, como a través de un enlace hacia otro agente, digamos l . Entonces, k puede cambiar hacia una estrategia alternativa $g_k \in G_k$ idéntica a g_k^* excepto para $g_{k,j} = 0$. Esto implica que la información accedida por k es la misma con g^* mientras que el número de nodos se reduce por 1, es decir $\Pi_k(g_k, g_{-k}^*) > \Pi_k(g^*)$. Absurdo, dado que g^* es un equilibrio de Nash.

Nótese que no toda red de Nash es circular:

Ejemplo 5: Sea $N = \{1, 2, 3\}$ con $I_i = 2$ para $i = 1, 2, 3$. Sea g^* representada por la *Tabla 5*.

Tabla 5. Perfil de estrategias

Estrategia	1	2	3
g_1^*	X	1	1
g_2^*	1	X	0
g_3^*	1	0	X

Por supuesto, g^* no define una red circular (este tipo es denominado una red *estrella*). Para verificar que g^* es un equilibrio (débil) de Nash veamos, por ejemplo, las mejores respuestas de 2 a g_{-2}^* (el análisis para 1 y 3 es análogo). Aparte de g_2^* , hay otras tres posibilidades: $g_2^a = \langle 0, X, 0 \rangle$, $g_2^b = \langle 1, X, 1 \rangle$ y $g_2^c = \langle 0, X, 1 \rangle$. Entonces, mientras $\Pi_2(g^*) = 2 + 2 + 2 - 2 = 4$, $\Pi_2(g_2^a, g_{-2}^*) = 2$, $\Pi_2(g_2^b, g_{-2}^*) = 2 + 2 + 2 - 3 = 3$ y $\Pi_2(g_2^c, g_{-2}^*) = 2 + 2 + 2 - 2 = 4$.

Este ejemplo muestra que hay redes de Nash no circulares que pueden dar el mismo pago que las circulares. Pero nótese que mientras los individuos obtienen el mismo pago, la estructura global difiere. De hecho, se tiene lo siguiente:

Proposición 3. g^* es una red circular sí y sólo si es una red de Nash con el mínimo número de enlaces.

Prueba: Si g^* es una red circular, para cada i , el pago está dada por (4). Supongamos que no es red de Nash. Esto es, para al menos un agente i , existe una desviación $g_i \in G_i$ tal que

$$\Pi_i(g_i, g_{-i}^*) > \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (8)$$

Sin embargo, la única manera de alcanzar este resultado es reduciendo el número de enlaces en los senderos que llevan información del resto de los agentes hacia i . Dado que g^* es circular, existe sólo un agente j tal que $g_{i,j}^* = 1$. Hay tres posibilidades de desviación para g_i :

- Para cada $j \neq i$, $g_{i,j} = 0$. Pero entonces i reduce el número de enlaces en $n - 1$ y accede sólo a su propia información, perdiendo la información de todos los otros $n - 1$ agentes. Dado que $\sum_{j \neq i} I_j > n - 1$ entonces $\Pi_i(g_i, g_{-i}^*) < \sum_{j \in N} I_j - (n - 1)$. Contradicción.

- Para un k dado, $g_{i,k} = 1$ mientras que es cero para cualquier otro agente. Pero entonces i corta el sendero entero $k \xrightarrow{g^*} i$ que pasa a través de j . Si la longitud de este sendero es m , $\mu_i(g_i, g_{-i}^*) = n - m - 1$, entonces $m - 1$ agentes no son desde ahora accedidos. Dado que $\sum_{j \in k \xrightarrow{g^*} i} I_j > m - 1$ se tiene que $\sum_{j \in k \xrightarrow{g^*} i} I_j - (n - 1) - m < \sum_{i \in N} I_i - (n - 1)$. Contradicción.
- Para más de un k , $g_{i,k} = 1$. Pero entonces, incluso si el número de agentes accedidos permanece igual, el número de enlaces se incrementa. De este modo, $\Pi_i(g_i, g_{-i}^*) \leq \Pi_i(g^*)$. Contradicción.

Si g^* es un equilibrio de Nash con el mínimo número de enlaces, entonces constituye un único componente que incluye todos los agentes en N (de otro modo la información de los agentes que no son accedidos se perderá para al menos algún otro agente, mientras que la reducción en los costos de los enlaces no será suficiente como para compensar dicha pérdida. Recuérdese que cada I_i es mayor que el costo de un enlace.) Como se demostró anteriormente (nuevamente véase nota 2) el número mínimo de enlaces que permite estar conectados a todos los agentes es n .

Para mostrar que g^* es circular supóngase que no lo es. Entonces, para cada etiquetamiento $l: N \rightarrow N$ tenemos que al menos uno de los $g_{l(1),l(2)}^*, g_{l(2),l(3)}^*, \dots, g_{l(n-1),l(n)}^*, g_{l(n),l(1)}^*$ tiene valor 0 o existe otro enlace. Esta última posibilidad debe descartarse dado que g^* tiene sólo n enlaces. Por ello, no debe ser posible conectar todos los agentes en N de tal manera que cada agente sólo este conectado con un agente. Pero, dado que g^* tiene que incluir a todos los agentes y conectarlos con n enlaces es posible elegir uno de los agentes en la estructura, por ejemplo i , y asociarle a ella la etiqueta, $l(i) = 1$. i está conectado a sólo un agente j dado solamente dado si i estuviese conectado con dos agentes diferentes solo restarían $n - 2$ enlaces para conectar los otros $n - 1$ agentes. En ese caso, al menos uno de los agentes no tendría un enlace directo dirigido hacia él y entonces obtendría un pago inferior al máximo. De acuerdo a esto, etiquetemos al agente conectado a i como j , tal que $l(j) = 2$. Consideremos el único agente a quién j esta conectado, digamos k . Etiquetamos a k como $l(k) = 3$. Procedamos del mismo modo hasta que el agente accedido por el sendero de conexiones, digamos r , sea tal que $l(r) = n$. Entonces, hasta ese momento, se habrá accedido a $n - 1$ enlaces. Queda por establecer a quién se conectará r . No puede ser ninguno de los agentes denotados como $2, \dots, n - 1$ dado que cada uno de ellos tiene sólo una conexión (hacia el agente anterior). Por otro lado, r no puede conectarse consigo mismo (dado que su pago sería sólo de I_r). Por ello, debe conectarse con i (quién tiene la etiqueta 1). Esto es, existe una función de etiquetamiento l tal que

$g_{l(1),l(2)}^*, g_{l(2),l(3)}^*, \dots, g_{l(n-1),l(n)}^*, g_{l(n),l(1)}^* = 1$. Esto contradice el supuesto del trabajo de que la red no es circular. Entonces, g^* es circular. Finalmente, se acepta que pueden existir muchas g^* . El hecho es que, dado que todas son circulares, la única diferencia entre ellas reside en los nombres de los agentes. Por ello, dos redes de Nash diferentes sobre N son isomórficas. Esto es, si g^* y $g^{*'}$ son dos redes de Nash sobre N , existe una función $f: N \rightarrow N$ tal que para cada i y j , $g_{i,j}^* = g_{f(i),f(j)}^{*'}$.

La *Proposición 3* indica claramente la estrecha relación entre la *estricticidad* de los equilibrios de Nash y la *minimalidad* del número de enlaces en la estructura resultante. Esto es:

Corolario: Dado un componente g , es un equilibrio estricto de Nash si y sólo si el número de sus enlaces es el mínimo.

Prueba: Supóngase que g es un equilibrio estricto de Nash pero el número de enlaces no es mínimo. Entonces, debe haber un enlace redundante, es decir un enlace que, si se lo cortara, dejaría al pago de al menos un agente sin cambios. Esto es, existe un agente i y una desviación g'_i tal que $\Pi_i(g'_i, g_{-i}) = \Pi_i(g)$. Resulta una contradicción, dado que supusimos que g es un equilibrio estricto de Nash. Dado que g es un componente para cada par de agentes i y j , $i \in N^{i:g}$ y $j \in N^{j:g}$, esto es, todos los agentes están conectados. Como se discutió más arriba, el mínimo número de enlaces que asegura esto es n . La única estructura con la propiedad de que todos los agentes están conectados por n enlaces es la red circular, la cual, de acuerdo con la *Proposición 3*, es un equilibrio estricto de Nash. Incluso si las redes circulares pueden identificarse con equilibrios estrictos de Nash ello no significa que sean únicas dentro del conjunto de agentes en N . Sin embargo, son ciertamente isomórficas, tal como se mostrará en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6: Sea $N = \{1, 2, 3\}$ con $I_1 = 2$, $I_2 = 3$ y $I_3 = 4$. Sea g^* representada por el perfil de estrategias en la *Tabla 6*.

Tabla 6. Perfil de estrategias

Estrategia	1	2	3
g_1^*	X	1	0
g_2^*	0	X	1
g_3^*	1	0	X

Establézcase que g^* es un equilibrio de Nash. Consideremos la mejor respuesta de 1 a g_{-1}^* . Hay cuatro opciones: $g_1^a = \langle X, 0, 0 \rangle$, $g_1^b = \langle X, 1, 0 \rangle$, $g_1^c = \langle X, 0, 1 \rangle$ o $g_1^d = \langle X, 1, 1 \rangle$. Se considera que $\Pi_1(g_1^a, g_1^*) = I_1 = 2$, $\Pi_1(g_1^b, g_1^*) = I_1 + I_2 + I_3 - 2 = 2 + 3 + 4 - 2 = 7$, $\Pi_1(g_1^c, g_1^*) = I_1 + I_3 - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$ y $\Pi_1(g_1^d, g_1^*) = I_1 + I_2 + I_3 - 3 = 2 + 3 + 4 - 3 = 6$. Es claro que g_1^b es la mejor respuesta a g_{-1}^* , pero precisamente $g_1^b = g_1^*$. Un argumento similar es válido para g_2^* y g_3^* . Esto muestra que g^* es una red de Nash. Por otro lado, considérese la siguiente red alternativa, g^* sobre el N que se representa en la *Tabla 7*.

Tabla 7. Perfil de estrategias

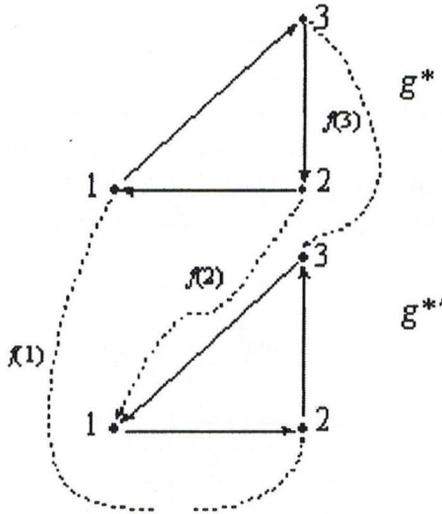
Estrategia	1	2	3
g_1^*	X	0	1
g_2^*	1	X	0
g_3^*	0	1	X

Un examen rápido muestra que g^* es también una red de Nash que para cada agente en N proporciona el mismo pago $g^* : \Pi_1(g^*) = \Pi_2(g^*) = \Pi_3(g^*) = I_1 + I_2 + I_3 - 3 = 9 - 2 = 7$. Es fácil establecer un isomorfismo $f : N \rightarrow N$ entre g^* y g_f^* : $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ y $f(3) = 3$. Entonces, considérese la *Tabla 8*, obtenida de la descripción de g^* por una transposición de las filas y las columnas a f .

Estrategia	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
g_{f1}^*	X	0	1
g_{f2}^*	1	X	0
g_{f3}^*	0	1	X

Nótese que la estructura de entradas en esta tabla es idéntica a la correspondiente a g^* . Esto establece el isomorfismo entre g^* y g_f^* . La *Figura 6* exhibe el isomorfismo gráficamente.

Figura 6. Isomorfismo de redes



De acuerdo al Lema 1 y la Proposición 3, un resultado estable en la interacción estratégica de agentes configura una red circular. Afirmamos que ésta es estable porque no hay incentivos a cortar o establecer nuevos enlaces. Una vez que la estructura de la red circular ha surgido, la nueva configuración puede llegar a no otorgar los mismos pagos a los agentes. Este argumento hace surgir la pregunta sobre la optimalidad del resultado. Esto es, ¿hay otra configuración que pueda asegurar mejores pagos a los agentes? Antes de responder negativamente esta pregunta, han de introducirse dos nociones diferentes de optimalidad. Una representa la noción de *bienestar social* asegurada por la red. Formalmente, sea $W : G \rightarrow Z$ definida como $W(g) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(g)$ para $g \in G$. Una red se dice *eficiente* si $W(g) \geq W(g')$ para todo $g' \in G$.

Por otro lado, tenemos la noción de optimalidad de Pareto. Una red g se dice *óptima de Pareto* si no existe otra red g' tal que para cada $i \in N$, $\Pi_i(g') \geq \Pi_i(g)$ y para al menos un i , $\Pi_i(g') > \Pi_i(g)$.

Se deduce entonces:

Proposición 4. *Una red estricta de Nash es tanto eficiente como óptima de Pareto.*

Prueba. Recordemos que una red estricta de Nash g^* sostiene el máximo pago para cada agente, $\Pi_i(g^*) = \sum_{j \in N} I_j - (n-1)$. Entonces, $\Pi_i(g^*) \geq \Pi_i(g)$ para cada $i \in N$ y cada $g \in G$. De este modo, g^* es *óptima* en el sentido de *Pareto*. Con el mismo razonamiento, $W(g^*) = \sum_{i \in N} \Pi_i(g^*) \geq \sum_{i \in N} \Pi_i(g) = W(g)$, para cada $g \in G$. Esto es, g^* es *eficiente*.

COMPARACION CON EL ESQUEMA DE BALA Y GOYAL

Como fue mencionado, el modelo propuesto comparte diversas características con el de Bala y Goyal (2000) –BG de ahora en más–. Pero, como veremos, la intuición es muy diferente en un caso y en otro. Más aún, los resultados que se siguen, incluso si hay alguna semejanza entre ellos, se alcanzan en base a diferentes conceptos.

Para organizar la discusión, introduciremos la noción de pagos usada en **BG**. Considérense dos definiciones ya dadas: $N^{g_i} = \{k \in N \mid g_{i,k} = 1\}$ es el conjunto de agentes con quienes i establece un enlace directo de acuerdo a su estrategia g_i mientras que el conjunto de agentes accedidos (directamente o de otro modo) por i es $N^{i;g} = \{k \in N \mid k \xrightarrow{g} i\} \cup \{i\}$. Sobre estos dos conjuntos, **BG** definen dos funciones: $\delta_i^d = |N^{g_i}|$ y $\delta_i(g) = |N^{i;g}|$, los cuales indican, respectivamente, el número de agentes a los cuales i tiene enlace directo y el número de agentes a los cuales i esta conectado, directa ó indirectamente. En la presentación original de **BG**, δ_i^d es denotada como μ_i^d mientras que δ_i es μ_i . Aquí se han reformulado para evitar confusiones.

BG consideran la siguiente función de pagos:

$$\Pi_i^{BG}(g) \equiv \delta_i(g) - \delta_i^d(g)c \tag{9}$$

donde c es el costo de establecer cada enlace. Esto es, los pagos de i son el número de agentes cuya información puede ser accedida por ella, menos el costo de los enlaces directos que se establecen de acuerdo con g .

Ejemplo 2. Segunda reformulación. Supongamos otra vez que la información poseída por los agentes es: $I_1 = 2$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$, $I_4 = 3$ y $I_5 = 3$. Entonces, bajo la estrategia g tenemos que en **BG**, suponiendo $c = 1$:

$$\begin{aligned}\Pi_1^{BG}(g) &= \delta_1(g) - \delta_1^d(g) = 5 - 2 = 3 \\ \Pi_2^{BG}(g) &= \delta_2(g) - \delta_2^d(g) = 4 - 1 = 3 \\ \Pi_3^{BG}(g) &= \delta_3(g) - \delta_3^d(g) = 3 - 2 = 1 \\ \Pi_4^{BG}(g) &= \delta_4(g) - \delta_4^d(g) = 1 - 0 = 1 \\ \Pi_5^{BG}(g) &= \delta_5(g) - \delta_5^d(g) = 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Se puede notar aquí que, por ejemplo, si $g_{1,5} = 0$, el agente 1 podría mejorar su beneficio (obteniendo 10 en vez de 9) porque podría continuar teniendo acceso a la información del agente 5 pero usando un enlace menos. Lo mismo sigue siendo cierto para el caso de BG, el cual en este caso particular incrementaría su beneficio de 3 a 4.

Pero, sí por ejemplo, 3 no contacta a 5, 1 mejoraría su pago bajo Π_1 de 9 a 10, mientras que en el caso de Π_1^{BG} permanece con su pago igual a 3.

Más aún, nótese que $\Pi_3^{BG}(g) = 1 = \Pi_4^{BG}(g)$, mientras que $\Pi_3(g) = 8 > 3 = \Pi_4(g)$.

Las diferencias en los pagos exhibidos en este ejemplo muestran claramente las diversas intuiciones detrás de $\Pi_i(g)$ y $\Pi_i^{BG}(g)$. Mientras que la primera depende del valor de la información disponible por los agentes, **BG** la basa en la cantidad de agentes accedidos. También los costos son diferentes. Dado que **BG** sólo considera los costos de establecer enlaces directos, mientras que en nuestro caso el costo de un sendero es compartido por todos los agentes que lo integran.

Para analizar la existencia de equilibrios, en **BG** se generaliza Π_i^{BG} por medio de la función

$$\Phi(\delta_i(g), \delta_i^d(g)) \quad (10)$$

incrementándose en el primer argumento y decreciendo en el segundo. Con esta función **BG** prueban las siguientes afirmaciones:

Una red de Nash es vacía ó mínimamente conectada. (Proposición 3.1, p. 1194)

Una red estricta de Nash es vacía ó circular. (Proposición 3.2, p. 1195).

Más aún:

1. Si $\Phi(m+1, m) > \Phi(1, 0)$ para algún $m \in \{1, \dots, n-1\}$ la única red estricta de Nash es la circular;

2. Si $\Phi(m+1, m) \leq \Phi(1, 0)$ para todo m y $\Phi(n, 1) > \Phi(1, 0)$, tanto la red circular como la vacía son redes estrictas de Nash;
3. Si $\Phi(m+1, m) \leq \Phi(1, 0)$ para todo m y $\Phi(n, 1) \leq \Phi(1, 0)$, la red vacía es la única red estricta de Nash.

Este último resultado puede ser evaluado cuando $\Phi(\delta_i(g), \delta_i^d(g)) = \delta_i(g) - \delta_i^d(g)c$. Así, el caso 1 se reduce a $m+1 - mc > 1$, es decir a $1-c > 0$ ó $c < 1$. El caso 2 indica que mientras $c \geq 1$, $n-c > 1$, es decir $c < n-1$. Finalmente, el caso 3 ocurre cuando $c \geq n-1$. De este modo, estos resultados indican que las únicas redes estrictas de Nash son las circulares cuando $c < 1$, mientras que las redes vacías son las únicas redes de Nash cuando $c > n-1$. Para $c \in [1, n-1]$ tanto la red circular como la vacía son equilibrios estrictos de Nash.

Para comparar los resultados con los de **BG** es preciso identificar las respectivas funciones de pagos, es decir:

$$\Pi_i(g) = \sum_{j \in N^{i:g}} I_j - \mu_i(g) = \delta_i(g) - \delta_i^d(g)c = \Pi_i^{BG}(g) \quad (11)$$

La manera más simple en la cual esto puede ocurrir es si $I_j = 1$ para cada $j \in N^{i:g}$ y $\mu_i(g) = \delta_i^d(g)c$. En particular, para las redes circulares es el caso que, para cada i , $N^{i:g} = N$, $\mu_i(g) = n-1$ y $\delta_i^d(g) = 1$. Para mantener ambas funciones de pagos iguales, el costo de cada enlace debe ser de $c = n-1$.

Pero entonces, si bien los pagos son los mismos, nuestro enfoque identifica a la red circular como la única red estricta de Nash. En **BG**, en cambio, la única red estricta de Nash es la red vacía. En otras palabras, las diferencias entre las respectivas funciones de pagos llevan a diferencias en los equilibrios.

UNA DISCUSION FINAL

Se ha presentado aquí un modelo de formación de redes en forma de un juego no cooperativo donde los agentes deciden a quién enlazarse, comparando los beneficios netos de sus acciones. Las decisiones se toman simultáneamente y por ello no se requiere de un esquema dinámico, tal como aparece en Bala y Goyal (2000). En cualquier caso, en un modelo donde los agentes no son miopes (es decir, como en nuestro esquema) y poseen mayores costos de establecer enlaces iniciales, también pueden plantearse procesos dinámicos que convergen a la red circular (Watts, 2000).

En este marco de análisis la heterogeneidad sólo significa que cada agente esta dotado con alguna información particular que es valiosa para otros agentes. Este supuesto lleva a un incremento en el beneficio de ingresar en la red, haciendo que la participación en la red siempre sea más valiosa que el aislamiento. Por otro lado, los costos tienden a ser mayores en nuestro esquema porque se supone que los agentes contribuyen a pagar los costos de los enlaces en los senderos que llevan información hacia ellos. Un resultado interesante es que las redes circulares surgen aquí como equilibrios de Nash que sostienen estructuras con un mínimo número de enlaces. Esto apoya la intuición de que las redes estrictas de Nash y la existencia de un número mínimo de conexiones son propiedades equivalentes.

REFERENCIAS

- Bala, V. y Goyal, S., "A Noncooperative Model of Network Formation". *Econométrica*, (68), 2000, p.1181-1229.
- Dutta, B. y Jackson, M., "The Stability and Efficiency of Directed Communication Networks". *Review of Economic Design*, (5), 2000, p.251-272.
- Dutta, B. y Jackson, M., *On the Formation of Networks and Groups*. Incluido en Dutta, B. y Jackson, M. (editores), *Models of Strategic Formation of Networks and Groups*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- Dutta, B., van den Nouweland, A. y Tijs, S., "Link Formation in Cooperative Situations". *International Journal of Game Theory*, (27), 1998, p. 245-255.
- Dutta, B. y Mutuswami, S., "Stable Networks". *Journal of Economic Theory*, (76), 1997, p. 322-344.
- Jackson, M. y Wolinsky, A., "A Strategic Model of Social and Economic Networks". *Journal of Economic Theory*, (71), 1996, p. 44-74.
- Qin, C.Z., "Endogenous Formation of Cooperative Structures". *Journal of Economic Theory*, (69), 1996, p. 218-226.
- Slikker, M. y van den Nouweland, A., "A One-Stage Model of Link Formation and Payoff Division". *Games and Economic Behavior*, (34), 2001, p.153-175.
- Tanenbaum, A., *Computer Networks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- Wasserman, S. y Faust, K., *Social Network Analysis*. Cambridge University Press, New York, 1994.
- Watts, A., "Non-myopic formation of circle networks". *Economic Letters* (74), 2002, p. 277-282.