FORMALIZACION DE LA TEORIA DEL DESARROLLO: UN ENFOQUE DE SISTEMAS COMPLEJOS*

I. Introducción

Un hecho particular en la Teoría del Desarrollo es la carencia de nuevos aportes teóricos en este área pasados los '60. Uno de sus principales representantes, W.Lewis, señaló que es evidente que la Teoría del Desarrollo "está en calma, luego de una serie de décadas animosas"[1], visión compartida por Hirschman[2], quien remarcó que "... como un observador y participante inveterado no puedo dejar de sentir que se ha perdido la antigua vivacidad, que cada día es más difícil el encuentro de ideas nuevas, y que el campo no se está reproduciendo adecuadamente".

La pérdida del interés por la teoría del desarrollo no puede deberse a que "el problema" haya desaparecido, o que simplemente se haya encontrado una solución. Más aún, la evidencia señala que los países pobres siguen existiendo, y que en muchos de los casos la brecha con los países ricos se ha incrementado.

Sin embargo, es posible ver que muchos aportes intelectuales debidos a esta disciplina han sido tomados por la Teoría del Crecimiento[3]. La pregunta que cabría formularse es por qué no se continuó con el desarrollo de estas ideas dentro de la Teoría del Desarrollo. Una hipótesis que ha sido planteada por P.Krugman (1992) es que mientras la Teoría del Crecimiento ha desarrollado desde sus comienzos formulaciones matemáticas de sus ideas, la Teoría del Desarrollo se ha presentado desde un principio como "vaga e imprecisa", por no exponer modelos matemáticos dinámicos que expliciten claramente los supuestos y condiciones de sus cadenas de razonamiento[4]. La incapacidad de las herramientas formales hasta ese momento existentes para representar los hechos típicos del desarrollo (estados de desequilibrio, irreversibilidades, innovaciones, economías externas, etc) provocó que se abandonara (o directamente no se encarara) cualquier intento de formalización.

---

* Este trabajo constituye una versión de la Tesis de Magister en Economía, presentada por la autora en el Departamento de Graduados de la Universidad Nacional del Sur, 1996. La autora agradece los valiosos comentarios recibidos por parte del Dr. Julio H. G. Olivera, del Dr. Daniel Heymann, del Dr. Fernando Tohmé y del Dr. Carlos Dabús.

La ventaja que para el análisis teórico presenta la formulación matemática es que constituye un inigualable instrumento para probar la coherencia lógica de una teoría, e iluminar por completo su contenido verdadero. La formulación matemática hace desaparecer toda incertidumbre sobre el planteo (esquema lógico) de una teoría, y mediante el simple examen de las relaciones postuladas por ella permite saber si las condiciones en que se funda son excesivas y contradictorias, o si son insuficientes para determinar una solución válida. En tales formulaciones, toda hipótesis debe ser necesariamente explícita y justificada. Por lo tanto, la matemática constituye un instrumento indispensable ya que permite extraer con relativa facilidad, de un cuerpo de hipótesis, todo su contenido lógico[5]. La discusión se centra sobre las relaciones que unen los conceptos representados, los cuales deben ser definidos de manera precisa.

Los modelos *analíticos*, cuentan con todas las ventajas que se mencionaron. Aparentemente, para obtener un modelo analítico que represente los conceptos principales de la Teoría del Desarrollo el campo adecuado es el del *análisis no lineal*, que permite representar situaciones dinámicas de desequilibrio, perturbaciones, procesos caóticos, procesos autoorganizados, etc., dado que estas características son propias de los procesos de desarrollo.

Teniendo en cuenta los argumentos presentados, el objetivo del trabajo es el de proponer **un nuevo enfoque metodológico para el análisis del desarrollo económico**, basado en la utilización del instrumental matemático proveniente del análisis no lineal. En la sección II se discutirán los avances en el análisis no lineal así como también las propiedades de las nuevas herramientas de análisis factibles de ser utilizadas para la formulación de modelos de desarrollo. La sección III presenta, a modo de ejemplo de la propuesta metodológica planteada, un modelo de desarrollo no lineal muy sencillo. La imposibilidad de alcanzar una solución analítica requiere de simulaciones, por lo que se realiza una serie de las mismas bajo distintos escenarios.

II. Avances en el análisis no-lineal

En esta sección se discutirán los principales aspectos del análisis no lineal, como herramienta alternativa de para la formalización de los fenómenos característicos de la Teoría del Desarrollo.

En primer lugar se debe considerar que, en general, el análisis económico se ha caracterizado por utilizar en su formalización ecuaciones de tipo lineal con el fin de representar el comportamiento de los distintos sistemas económicos. Este tipo de análisis produjo resultados satisfactorios, sin embargo, estas simplificaciones resultaban en muchos casos excesivas: fenómenos típicos, tales como la cooperación, el conflicto, el desequilibrio, entre otros, no podían ser formalizados con las herramientas matemáticas utilizadas hasta ese momento. Es así que áreas como la Teoría del Desarrollo, donde dichos fenómenos son la regla de comportamiento y no la excepción, adolecieron de una formalización rigurosa de estos aspectos, quedando relegada en los pocos modelos formales presentados la característica central de la teoría.

A partir de los '80 se plantea un cambio de óptica entre algunos economistas teóricos: la Nueva Teoría del Comercio Internacional, principalmente con los aportes de P.Krugman, la Teoría del Crecimiento Endógeno, con las presentaciones de P.Romer, Aghion y Howit, Lucas, entre otros, se presentan como ejemplos de la incorporación de fenómenos no lineales en el análisis económico, tales como los rendimientos crecientes y las economías de escala, el concepto de *learning-by-doing* y el rol del cambio tecnológico.

Esta sección presentará, en el marco de los sistemas complejos, los principales conceptos y propiedades de los sistemas caóticos, la sinergética y los sistemas críticamente autoorganizados y su posible utilización para la comprensión de los fenómenos económicos.

II.1 Sistemas No-lineales

Actualmente existe un interés creciente por las dinámicas no lineales, si bien dicho interés no abarca un gran porcentaje de los economistas teóricos. Muchos de entre ellos dudan de la eficacia de tal herramienta para comprender los fenómenos económicos, mientras que otro grupo considera que una relevante porción de las fluctuaciones de los datos macroeconómicos pueden ser explicadas como un fenómeno determinístico de tipo caótico, endógenamente creado por la interacción de las fuerzas de mercado, tecnologías y preferencias. Otro grupo de investigadores considera la posibilidad de describir los distintos sistemas económicos como sistemas que se autoorganizan, dependiendo de los parámetros que los rigen y de sus interacciones con el medio.

Decimos que un *sistema es no lineal* cuando genera un comportamiento complejo que no puede ser descripto por ecuaciones en diferencias o diferenciales lineales. Dichos sistemas se caracterizan por la aparición de *atractores* , que pueden ser puntuales o periódicos (análisis tradicional), o *extraños*, pudiendo el sistema estar en el borde del caos (modelos de autómatas celulares , modelos de criticalidad autoorganizada), o presentar un comportamiento caótico, en cuyo caso la dinámica del sistema y las propiedades del mismo son estudiadas por la Teoría del Caos. El estudio de las transiciones *entre* atractores lleva al análisis de sistemas autoorganizados . O al estudio de la sinergética.

Una motivación fundamental para el estudio de sistemas no lineales es la termodinámica. Se puede decir de un modo muy general que la termodinámica tiene como objeto el predecir las reacciones de un sistema ante modificaciones en las condiciones externas. Cuando se la aplica al estudio de sistemas abiertos se denomina termodinámica del no equilibrio, estudiando los fenómenos de inestabilidad, desorden, desequilibrio, asimetría e irreversibilidad usuales en tales sistemas. La estrategia que ha guiado el desarrollo de la termodinámica del no equilibrio desde que apareció hace algo menos de treinta años ha sido la de estudiar la evolución de sistemas complejos, analizando el papel de las fluctuaciones aleatorias en la generación de nuevos patrones de comportamiento.

Para entender las relaciones entre esta nueva rama de la termodinámica con las tradicionales conviene distinguir tres tipos de sistemas termodinámicos y las clases de análisis que se les aplica:

1- sistemas aislados (siempre alcanzan el equilibrio)
2- sistemas cerrados (sometidos a condiciones dinámicas de frontera, alcanzan un régimen cercano al equilibrio)
3- sistemas abiertos (sometidos a cambios permanentes en los parámetros, su estructura no se mantiene en el tiempo)

Una condición necesaria para la inestabilidad estructural en los sistemas del tipo 3 son las reacciones autocatalíticas, en las cuales los valores de las variables endógenas se retroalimentan dando lugar a regiones de inestabilidad local en sus soluciones. En una región estable ocurre que en la cercanía del equilibrio sólo grandes perturbaciones pueden determinar el paso de una estructura a otra, donde estructura significa la caracterización del comportamiento en un entorno del valor de los parámetros. En cambio pequeñas alteraciones en la región de inestabilidad pueden producir el cambio de estructura [(6)]. Según el principio de Boltzmann, que se aplica a los sistemas de tipo 1 y 2, los cambios termodinámicos se dan de estados menos probables a estados más probables, siendo el equilibrio el estado más probable de un sistema. Sin embargo, este principio deja de ser válido para sistemas abiertos ya que aquí la distribución de probabilidades sobre el espacio de estados no es única sino que cambia con los parámetros del sistema. Si la variación en los parámetros es frecuente el sistema puede no tener tiempo para alcanzar los estados más probables en cada distribución.

En los sistemas abiertos se observa la aparición de macroestructuras, cada una de las cuales muestra a un número grande de componentes "aliándose" para generar un comportamiento colectivo. Cuanto más grandes sean las macroestructuras mayor estabilidad estructural se producirá en el sistema. Por otra parte, cuanto mayor sea la complejidad, más necesaria se hace la presencia de una única macroestructura ya que hay un mayor número de tipos de perturbación que pueden afectar en forma diferente a distintas macroestructuras generando inestabilidad en el sistema. Existe por lo tanto una confrontación entre la estabilización vía competencia entre macroestructuras y la inestabilidad generada por las fluctuaciones. Como resultado aparece un umbral de la estabilidad estructural traspasado el cual las perturbaciones van a ser amplificadas provocando cambios estructurales.

En relación a la ciencia económica cuando el sistema muestra propensión a la inestabilidad local se hace necesario describirlo mediante un modelo de ecuaciones no lineales con parámetros variables. Los sistemas diferenciales no lineales sujetos a cambios en sus parámetros muestran soluciones -si es que existen- en las que aparece explícitamente la variable tiempo. De esta forma, es factible analizar los procesos irreversibles propios de los sistemas complejos.

El estudio de las transiciones entre atractores se denomina sinergética, como se mencionó anteriormente. Más precisamente, la sinergética es la aplicación de la termodinámica del no equilibrio a sistemas complejos en los que las interacciones no se reducen sólo a cambios en energía. Como su nombre indica pone énfasis en el análisis de la acción de conjunto. Las propiedades macroscópicas de los sistemas sinergéticos se describen frecuentemente en términos de cooperación o competencia entre macroestructuras. Como se verá más adelante, cuando se formulan los problemas sinergéticos en términos matemáticos aparecen siempre las mismas ecuaciones en las cuales cada estado del sistema depende de la interacción entre macrocomportamientos. Estos macrocomportamientos se dividen en dos clases diferenciadas para cada valor de los parámetros: los que se comportan de manera "normal" y los inestables que "quieren" pasar a un estado distinto. Un factor que desencadena las transiciones, como se vio en el apartado anterior, es la presencia de *innovaciones* (7).

Los sistemas dinámicos se describen mediante espacios de estados y funciones de transición entre los mismos. Usualmente, el espacio de estados puede considerarse de dimensión fija, indicando que el número de variables relevantes es el mismo a través del tiempo. Pero si se desea representar la presencia de innovaciones conviene dejar libre el número de dimensiones del espacio. Esto conlleva a que el número de atractores (sean éstos puntos fijos, ciclos periódicos o aperiódicos, etc.) resulte múltiple y que la evolución del sistema conduzca a que no se estabilice en uno solo de ellos. Podría afirmarse que el sistema pasa ciertos intervalos de tiempo en un atractor antes de saltar a la cuenca de atracción de otro. Este comportamiento trae aparejada la posibilidad de que la trayectoria del sistema pueda exhibir varios comportamientos posibles, desencadenados por pequeñas perturbaciones.

Se dice que un sistema complejo con las propiedades recién discutidas exhibe la aparición de autoorganización. Esto es, la posibilidad de adquirir propiedades nuevas modificando por sí mismo su organización. Dos elementos intervienen siempre en el comportamiento autoorganizador: la necesidad representada en leyes determinísticas que rigen al sistema y dan lugar a la aparición de macrocomportamientos en interacción y, la incertidumbre que se representa en las fluctuaciones al azar que sufre el sistema.

Resulta claro ver que la incorporación de los conceptos de la termodinámica del no equilibrio a la teoría económica permiten introducir formalmente tres fenómenos que sólo admitían un tratamiento descriptivo. Estos son:

- los estados de desequilibrio económico
- la importancia de los procesos históricos
- la influencia de la incertidumbre sobre el funcionamiento económico

El primer punto puede ahora entenderse como resultado de que los cambios continuos en algunos parámetros estructurales dan lugar a situaciones en que la economía no tiene tiempo de relajación hasta un estado de equilibrio. Alternativamente se ve también que un equilibrio puede ser caótico, lo que a los ojos de los agentes es indiferenciable de la acción del azar. Este punto es de fundamental importancia a la hora de analizar series de tiempo en Economía. Las propiedades de los sistemas caóticos y sus aplicaciones se analizarán en la siguiente sección.

En cuanto a la importancia de la historia, resulta claro que las transiciones entre distintas estructuras pueden llegar a ser irreversibles. Esto se debe a que para los valores de los parámetros por encima de los valores críticos se pueden dar varios equilibrios alternativos. La fluctuación al azar determina en cuál de ellos va a estar el sistema. Un cambio inverso en el valor de los parámetros puede conducir a un equilibrio distinto al que regía antes del cambio estructural. Por lo tanto, una descripción del estado en que se encuentra una economía tiene que tener en cuenta el camino que recorrió para llegar a ese estado.

Finalmente, la incertidumbre, en la forma de ruido aleatorio que desencadena cambios estructurales, resulta un factor determinante en el comportamiento de las economías. De esta manera, las fluctuaciones e innovaciones entran en la teorización económica y no quedan meramente relegados a la formulación de modelos con fines econométricos. Existe otro tipo de incertidumbre, asociada con la imposibilidad de predecir el estado en el que se encontrará el sistema en el largo plazo. Esta característica está asociada a los sistemas caóticos, que aún siendo sistemas deterministas no permiten la predicción de valores a largo plazo dada la sensibilidad a las condiciones iniciales. Este tema es abordado con más profundidad a continuación.

II.2 Sistemas Dinámicos Caóticos

Un *sistema dinámico* es un conjunto de elementos, cuyo estado se caracteriza por un conjunto de variables x, y, ...,z entre las que existe una relación matemática descripta por leyes o ecuaciones de movimiento o evolución. El propósito del análisis es el de determinar la variación temporal de esas variables mediante funciones x(t), y(t), ...,z(t), estableciendo y resolviendo las ecuaciones de evolución. Dichas ecuaciones pueden ser diferenciales o en diferencias, lineales o no lineales.

Dependiendo del sistema de ecuaciones utilizado, el sistema puede ser linealmente o no linealmente descripto. Un sistema es no lineal si la variable de estado se eleva a una potencia más alta que la unidad (por ejemplo, la ecuación de Bernoulli), o si contiene un producto entre la variable de estado y su derivada en el tiempo. Cuando los métodos de resolución tradicionales no son posibles, se puede realizar un enfoque gráfico-cualitativo, o procedimientos de aproximación numérica. La teoría cualitativa o topológica analiza las propiedades de las solución sin que de hecho ésta se conozca, ni se intente encontrar una aproximación por medio de series de potencia u otros métodos cuantitativos.

Una ecuación en diferencias del tipo anteriormente mencionada cuyas propiedades han sido extensamente analizadas es la *ecuación lógistica.* Formalmente:

$$x \rightarrow f(x, a) = ax(1 - x)$$

donde $x \in [0\ 1]$, $a \in [0\ 4]$

La función es invariante en [0 1]: la imagen f(x, a) de todo punto $x \in [0\ 1]$ pertenece a [0 1].

La derivada primera de la función logística se anula para x = 0.5. Se considera entonces que la función $x \rightarrow f(x, a) = ax(1 - x)$ posee un máximo único en x = 0.5, que constituye un punto crítico de la función. La función logística es unimodal para todos los valores de a.

Se define la recurrencia logística por la relación:

$$u_{n+1} = f(u_n, a) = a\, u_n (1 - u_n)$$

siendo el primer término $u_0 \in\ ]0\ 1[$.

La naturaleza de la recurrencia logística depende del parámetro a. Para estudiar la dependencia de la función al parámetro a se definen los puntos fijos de la función logística como aquellos puntos que verifican:

$$f(I) = I\ ,\ \text{es decir}\ \ aI(1 - I) = I$$

El análisis de los puntos fijos de la función y sus iteradas muestra que[8]:

- cuando 0 < a < 1 el punto fijo I = 0 es el único punto fijo de la función, y es estable. Es también el único punto fijo de la iterada f^2,..., f^n,...porque de manera general: $f^n(I) = [f(I)]^n$
- si 1 < a < 3 el punto fijo I = 0 se torna inestable para la función f y todas sus iteradas f^n.

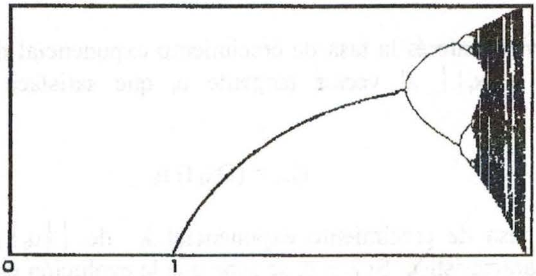
El punto $I^* = 1 - 1/a$ aparece como el único estable para la función f y todas sus iteradas. Cuando a > 3 : los dos puntos fijos I e I* se tornan inestables para f y todas sus iteradas.

El análisis de los puntos fijos de f, f^2, f^3 ... muestra que, mientras el parámetro pasa de un valor $3 - \varepsilon$ a uno $3 + \varepsilon$, el comportamiento de los puntos fijos de la función logística $x \to f(x, a) = ax(1 - x)$ se modifica en el sentido que un punto fijo estable $I^* = 1 - 1 / a$ se substituye por un ciclo de orden dos, $\{c_1, c_2\}$. Se dice entonces que $a = 3$ constituye en *punto de bifurcación* para la función logística. El análisis de los multiplicadores de $\{c_1, c_2\}$ revela que dicho ciclo es estable para $3 < a < 3.449489743$. El mismo procedimiento se realiza para analizar ciclos de orden 4, 8, 16...

El análisis anterior puede representarse en un gráfico donde se mida en el eje de las abcisas el valor de a que varía de 0 a 4, y en las ordenadas los valores de los puntos que forman el ciclo estable, si es que existe, para cada valor de a. Los valores de los puntos hallados pertenecen al intervalo [0 1]. El diagrama que representa dichos valores se denomina *diagrama de bifurcaciones.*

Para realizar el gráfico se parte siempre de un punto crítico (por ejemplo, x = 0.5 que es el punto para el cual la función alcanza un máximo) para asegurar alcanzar un ciclo estable. Se calculan los 150 primeros valores para cada punto de a, que no se representan y se grafican los 300 restantes.

GRAFICO 1: Diagrama de bifurcaciones



Puede apreciarse que para distintos valores de a el fenómeno de duplicación se presenta indefinidamente. Feigenbaum demostró que, notando $[\,a_n \;\; a_{n+1}\,]$ el intervalo donde aparece la n-ésima duplicación de período se alcanza asintóticamente la relación:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n - a_{n+1}} \right| = \delta = 4.669\,201\,609...$$

De allí resulta que el fenómeno de duplicación del período sigue hasta el valor:

$a_\infty = 3.\ 569\ 945\ 6...$, siendo a_∞ la constante de Feignebaum.

Al trazar el diagrama de bifurcaciones para cualquier $a > a_\infty$ se produce un comportamiento desordenado o aperiódico: Se dice entonces que la órbita es *caótica*. En este caso, existe un número infinito de ciclos inestables de período 2^k , donde k = 1, 2, 3... A diferencia de los ciclos estables, los ciclos inestables no son potencia de 2.

Las propiedades características de las órbitas caóticas son:

- *sensibilidad a las condiciones iniciales*

Un sistema presenta sensibilidad a las condiciones iniciales si un pequeño cambio en el estado inicial produce un cambio posterior que crece exponencialmente en el tiempo. Para la ecuación logística, dado un pequeño cambio δx_0 en la condición inicial, el cambio δx_t de la solución satisface:

$$\delta x_{t+1} = (D\, x_t\, F)\, \delta x_t$$

Reviste interés la tasa de crecimiento exponencial de $||\delta x_t||$ o la longitud $||x_t||$ al vector tangente u_t que satisface la ecuación linealizada.

$$u_{t+1} = (Dx_t\, f)\, u_t$$

La tasa de crecimiento exponencial λ de $||u_t||$ es llamada exponente característico. Si $\lambda >$ o, se sabe que la evolución en el tiempo es caótica, o tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, o que el atractor correspondiente es un atractor extraño, como se analizará más adelante.

- *densidad de los puntos periódicos sobre* [0 1].

En todo el subintervalo U de [0 1] existe al menos un punto periódico, es decir, existe un punto $x \in U$ y un número entero p tal que $f^p(x) = x$.

$\forall$ a $\in$ [3.54 4] , f(x) = ax (1 - x) tiene la propiedad característica que los puntos periódicos forman un conjunto denso sobre [0 1].

- *transitividad topológica*

Si para un valor a $\in$ [3.54 4] la función logística f(x) = ax (1 - x) es tal que para dos subintervalos cualquiera u y v de [0 1] existe una órbita que parte de x $\in$ U y un número entero n tal que $f^n(x) \in V$ se dice que la función tiene la propiedad de transitividad topológica. Esta propiedad significa que el conjunto [0 1] es indescomponible sobre la dinámica de f en el sentido de que no se puede descomponer [0 1] en dos subconjuntos disjuntos que sean invariantes para f. Es entonces imposible que una órbita tenga todos sus puntos en un subconjunto propio cerrado de [0 1](9).

Una forma de establecer si una órbita es estable o no es utilizando el número de Lyapunov: dado a $\in$ [3.56 4] para determinar si la órbita es estable (de un ciclo elevado) o inestable:

$$\text{Número de Lyapunov}: L = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} |f'(x_i)|$$

con x_i el i-ésimo elemento de la órbita $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x)...\}$ es decir que $x_i = f^i(x)$.

Si L < 1 el ciclo es estable.

Si L > 1 la órbita es caótica.

Otra forma de analizar el problema anterior es utilizando el exponente de Lyapunov, siendo éste el logaritmo del número de Lyapunov.

Un fenómeno que se observa en el diagrama de bifurcaciones es la autosimilitud: toda parte o mitad del gráfico es isomorfa al gráfico entero. Esta noción se encuentra estrechamente ligada al estudio de la geometría fractal. Un objeto geométrico se dice fractal si su dimensión de Haussdorf es no entera. Por otro lado, la Dimensión de Haussdorf (o capacidad de Kolmorogov) de un conjunto A:

$$DH = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(A, \varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

donde $N(A, \varepsilon)$ es el número mínimo de hipercubos de lado ε de dimensión n que cubran A si el conjunto considerado está situado en un espacio de dimensión n.

Dado DH, puede observarse que la dimensión de un punto es 0, la de un segmento 1, la de un rectángulo 2,..., es decir que para los conjuntos geométricos simples la DH es igual a la dimensión euclideana. También se interpreta DH como la pendiente de la curva obtenida poniendo en la abcisa $\log(1/\varepsilon)$ y en la ordenada $\log N(\varepsilon)$.

Cuando ε es muy pequeño:

$$\log N(\varepsilon) \approx DH.\log(1/\varepsilon) = \log(1/\varepsilon)^{DH} = \log \varepsilon^{-DH}$$

o sea $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-DH}$

Cuando la DH no es un entero, el conjunto geométrico considerado es un fractal.

Una aplicación fundamental del estudio de los fractales es en la definición de *atractor extraño*. En primer lugar, se define al *atractor* : cuando la órbita $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x)...\}$ generada por el punto x para la función numérica f tiende a un punto fijo I o hacia un ciclo de periodo finito se dice que el punto I o el ciclo es un atractor de la función f (con dimensión 0). Ejemplos de atractores simples son los puntos fijos, los ciclos límites y los toros (superficie de una rosquilla, describe movimientos que constan de dos oscilaciones independientes. Las órbitas permanecen cerca unas de las otras, estando por ello garantizada la predictibilidad a largo plazo).

Para la definición de atractor extraño se considera un sistema dinámico $x_{t+1} = f[x_t]$, donde $x_t \in R^n$, con $n = 2$ ó $n = 3$, es una aplicación de R^n en sí mismo. Cuando el sistema es disipativo, el jacobiano de la función es menor que 1, el volumen disminuye y tiende a cero. De hecho es posible que el valor propio asociado a una dirección propia sea superior a 1 pero el producto de todos los valores propios es inferior a 1. En ese caso hay una dilatación en una dirección pero una contracción en las otras direcciones que engendra una contracción del volumen de la superficie del gráfico del sistema. En este caso hay una infinidad de curvas de la misma forma y muy juntas unas de otras que están contenidas en un conjunto compacto de dimensión de Haussdorf fractal e inferior a la dimensión n del sistema. Se dice que existe un atractor extraño ya que la figura de las curvas parece confundirse en una sola curva periódica, cuando en realidad se trata de infinidad de curvas muy próximas unas de otras. En la función logística, para $a = a_\infty$ existe un ciclo estable de periodo finito, llamado atractor de Feigenbaum. Se trata de un conjunto de Cantor con DH = 0.630.

En síntesis, la solución de una ecuación diferencial puede caer en alguna de las siguientes categorías:

- *Puntos atractores*: dado $t \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow x^*$, donde x^* no depende del tiempo (es un punto fijo para la evolución en el tiempo). En mecánica y física dicho punto se denomina equilibrio.
- *Atractor periódico*: dado $t \rightarrow \infty$, la distancia entre x_t y x_t^* tiende a cero, donde x_t^* es periódico, es decir, $x_{t+T}^* = x_t^*$.
- *Atractores extraños*: dado $t \rightarrow \infty$, la órbita (x_t) puede ser asintótica a un conjunto más complicado (atractor) que un punto o bucle (atractor periódico). Se supone que el promedio de tiempo gastado en varias regiones del espacio de fases es bien definido y se representa por una medida de probabilidad $\rho(dx)$ invariante en la evolución en el tiempo.

Los atractores extraños no son curvas o superficies lisas, sino objetos de dimensión fractal. El movimiento sobre un atractor extraño presenta el fenómeno de sensibilidad a las condiciones iniciales. Aunque los atractores extraños sean de dimensión finita, el análisis de frecuencias temporales muestra un continuo de frecuencias.

Es importante señalar que el comportamiento caótico aparece frecuentemente en sistemas dinámicos con una dimensión suficientemente alta. Se necesita que dicha dimensión (n) sea:

$n \geq 3$ para sistemas expresados en tiempo continuo

$n \geq 2$ para sistemas expresados en tiempo discreto (mapa invertible en f)

$n \geq 1$ para sistemas expresados en tiempo discreto (mapa no invertible en f).

Cabe agregar que en los sistemas caóticos, no existe incompatibilidad lógica entre determinismo y azar. Estos sistemas, si bien son totalmente deterministas, no aseguran la exactitud de las predicciones a largo plazo. En general dicha predicción es prácticamente imposible, fundamentalmente por dos razones: en primer lugar se plantea el problema de identificación de las ecuaciones que producen el fenómeno estudiado. Este problema se acentúa en los modelos económicos en los que la cantidad de fenómenos que se deben captar para explicar el comportamiento de cada variable es excesivamente alto. Pero aún conociendo con exactitud el sistema de ecuaciones (hecho mucho más factible en el área de la física o la química, por ejemplo) se plantea el problema de la sensibilidad a las condiciones iniciales, estudiado anteriormente. Con sensibilidad a las condiciones iniciales es posible tener determinismo e impredictibilidad a largo plazo: es posible que el estado inicial de un sistema, en lugar de estar fijado de manera precisa, esté distribuido según una cierta ley aleatoria.

II.3 Sinergética

El estudio de la sinergética pertenece a un campo interdisciplinario de investigación que trata con la emergencia de estructuras espaciales, temporales, espacio-temporales, y funcionales en sistemas complejos. Se ocupa principalmente de la formación de patrones en sistemas en desequilibrio. De allí que a través de los principios básicos de la sinergética se pretenda un acercamiento a los sistemas complejos en un nivel *macroscópico* de descripción, siendo una herramienta para analizar las transiciones de comportamiento y el problema de reconocimiento de patrones. Estos patrones surgen de la *autoorganización* del sistema: una estructura altamente ordenada emerge en un sistema sin interferencia **específica** externa.

La autoorganización surge debido a la emergencia de *parámetros de orden*, que esclavizan los restantes grados de libertad del sistema. Los parámetros de orden fuerzan las componentes del sistema a comportarse de una manera coherente. A su vez, las componentes individuales determinan el parámetro de orden.

Se ha demostrado la existencia de numerosos sistemas autoorganizados, en donde la acción del láser es un ejemplo particularmente importante (10). Un ejemplo con mayores analogías a los sistemas económicos surge de la biología con el problema de la morfogénesis (desarrollo de los organismos vivos basado en la diferenciación de células). Durante el crecimiento de un tejido, las células de un organismo tienen que recibir información acerca de cómo diferenciarse unas de otras. Se plantea la cuestión de dónde está almacenada esta información, surgiendo al respecto dos posturas en cierto grado antagónicas:

- la información está almacenada en cada célula por separado
- la información es producida por el comportamiento cooperativo de las células

Los resultados parecerían confirmar la segunda hipótesis, en el sentido que la información relevante se genera en forma colectiva. De allí la posibilidad de formulación de un modelo teórico, basado en la noción de campo morfogenético. Mediante la *difusión y reacción*, las células en un tejido producen productos químicos que generan un campo de concentraciones químicas (campo morfogenético). La información de cómo diferenciarse se encuentra implícita en este campo. Ciertos valores de las concentraciones provocan la activación de ciertos genes en las células.

En general, se puede hablar de dos características propias de un sistema sinergético: es un sistema compuesto por varios subsistemas, y existe un flujo de energía, materia o información, a través del sistema, es decir que es un sistema abierto alejado del equilibrio. Cambiando las condiciones externas se introducen cambios cualitativos de comportamiento que pueden llevar de estados desestructurados a patrones coherentes, o de estados ordenados a patrones ordenados en forma diferente. La inestabilidad del sistema puede convertir estados estacionarios en estados que varíen en el tiempo, y puede causar transiciones entre distintos comportamientos temporales.

Mediante el cambio de las condiciones externas, los sistemas dinámicos pueden ser forzados a pasar por una jerarquía de inestabilidades entre estados con diferentes patrones espacio-temporales o de comportamiento. Todas estas transiciones se encuentran basadas en los mismos mecanismos universales que se resumen en el **principio esclavizador de la sinergética.** Cercano a la transición el comportamiento del sistema es gobernado por parámetros de orden espontáneamente generados que esclavizan los restantes grados de libertad del sistema.

Para formular matemáticamente el principio esclavizador de la sinergética, se inicia el análisis en el nivel *mesoscópico* del mismo (mediante variables promedio)[11]. Una reacción está descripta por un conjunto de ecuaciones de reacción-difusión. Generalmente, el sistema bajo consideración es definido por N variables de estado q_i, con $i = 1,..,N$. Se utilizará notación vectorial, por lo que se llamará q al *vector de estado*. Dicho vector cambia en el tiempo, por lo que se formula:

$$(d/dt)q = N\ (q, \lambda) + F\ (q)$$

El operador N (q, λ) es no lineal. Cambios en las condiciones externas son tomados en cuenta por un conjunto de parámetros de control λ. Las fuerzas de fluctuación se encuentran concentradas en el operador estocástico F (q). El problema puede ser analizado suponiendo que F tiene una distribución con media nula.

Considérese un sistema que está en un estado estable periódico o cuasiperiódico, q_0, y que por un cambio en los parámetros de control pierde su estabilidad. Se supone que el nuevo estado permanece cercano a ese estado inicial inestable.

El estado perturbado es:

$$q(\lambda, t) = q_0(\lambda, t) + w(\lambda, t)$$

donde w (λ, t) indica la perturbación.

Se sabe, derivando con respecto al tiempo, que:

$$(d/dt)\, q = (d/dt)\, q_0 + (d/dt)\, w$$

donde $(d/dt)\, q_0 = 0$.

Linealizando en el entorno de q_0:

$$(d/dt)\, w = kw$$

$$w = k^* e^{kt}$$

donde los k_i^* son los modos normales o amplitudes asociadas con los autovalores k_i que surgen de:

$$kw = (dN / dq)\, w$$

Cada solución k_i determina una dirección de movimiento, y la parte real de k_i su magnitud. Entonces, la ecuación $w = k^* e^{kt}$ se convierte en:

$$w = \sum k_i^* e^{kit}$$

Por lo tanto,

$$q(\lambda, t) = q_0(\lambda, t) + \sum k_i^* e^{kit}$$

Para $t \to \infty$, $q(\lambda, t) \to q_0(\lambda, t)$, para valores de λ para los cuales $q_0(\lambda, t)$ es estable.

Para el caso de valores críticos, el resultado varía. En primer lugar va a existir algún k_i tal que su parte real sea cero. Entonces, los modos normales $k_i^* (\lambda)$ pueden dividirse en estables, si su parte real es estrictamente menor que cero, o inestables, si su parte real es positiva. La ecuación del estado perturbado expresada anteriormente se puede formular ahora como:

$$q(\lambda, t) = q_0(\lambda, t) + \sum_u k_u^* e^{kut} + \sum_s k_s^* e^{kst}$$

siendo los e^{kut} los modos inestables, los k_u^* las amplitudes, los e^{kst} los modos estables y los k_s^* las amplitudes.

Diferenciando:

$$(d/dt)\, q = (d/dt)\, q_0 + k_u^*\, d_t(e^{kut}) + k_s^*\, d_t(e^{kst})$$

Llamando ξ_u a e^{kut}, y ξ_s a e^{kst}, y reescribiendo la expresión anterior, se tiene que:

$$d_t\, \xi_u = k_u\, \xi_u + \text{ un componente no lineal}$$
$$d_t\, \xi_s = k_s\, \xi_s + \text{ un componente no lineal}$$

Tomando sólo la parte lineal, como $k_s << 0$:

$$d_t\, \xi_u >> d_t\, \xi_s$$

Luego, mientras los ξ_s se anulan rápidamente, los ξ_u siguen desplazando al sistema. Los modos estables quedan "esclavizados" por los inestables:

$$\xi_s(t) = \xi_s(\xi_u(t))$$

o sea

$$e^{\lambda st} = e^{\lambda s \exp(\lambda ut)}$$

Es fácil ver que en la ecuación anterior el tiempo de convergencia lo da la dirección inestable. Finalmente, la ecuación del estado perturbado se formula en función de los modos inestables, verificándose que el sistema queda con pocos grados de libertad:

$$q(\lambda, t) = q_0(\lambda, t) + \sum_u k_u^* e^{kut} + \sum_u k_s^* e^{ks \exp(kut)}$$

Los ξ_u son *parámetros de orden*. Una inestabilidad que aparece variando un parámetro de control puede llevar a transiciones de fases de no equilibrio conducidas por los parámetros de orden. Cuáles sean los parámetros de orden depende fundamentalmente de la función N. El impacto de las fluctuaciones sobre el comportamiento del sistema es fuerte en un punto cercano a la inestabilidad. La ocurrencia de inestabilidad es indicada por fluctuaciones críticas.

Finalmente, cuando $t \to \infty$, $q \to q_1$, siendo q_1 un nuevo estado del sistema. Las fluctuaciones aleatorias sólo han contribuido a disparar el proceso de autoorganización.

Un caso especial de autoorganización es el de Sistemas Críticamente Autoorganizados, que por sus características netamente distintivas merecen un apartado especial para su estudio.

II.4 Sistemas Críticamente Autoorganizados (SOC)

La noción de SOC fue propuesta por Per Back y otros autores(12) , quienes por medio de modelos computacionales hallaron que sistemas descriptos por reglas de comportamiento muy sencillas podían producir comportamientos complejos, análogo a muchos fenómenos que se pueden observar en la naturaleza. Una de las características principales que se observaron es la obtención de patrones de naturaleza fractal.

La noción de criticalidad proviene de la termodinámica, que como se vio anteriormente, relaciona el estado del sistema con la temperatura que alcanza. De acuerdo a ésto, los sistemas pueden presentarse en varias *fases* distintas (estado liquido, gaseoso,..., superfluídos, plasma,...), diciéndose que un sistema es crítico si se encuentra en una *transición de fases*. Cuando el sistema se aproxima a un punto crítico comienza a organizarse a nivel microscópico, apareciendo grandes fluctuaciones estructurales, provenientes de las interacciones locales. Tales fluctuaciones tienen como resultado que la **escala característica** del sistema(13) en el punto crítico desaparezca. Este comportamiento es general e independiente de los detalles específicos del sistema dinámico.

A diferencia de otros sistemas que se autoorganizan, un sistema SOC no requiere un parámetro externo de control (tal como la temperatura) para exhibir comportamiento crítico, dado que se ajusta a sí mismo en la medida que el comportamiento crítico ocurre. Estos sistemas, sometidos a una perturbación externa, evolucionan hacia un *estado estable crítico*, en el sentido que muestran correlaciones espaciales y temporales de largo rango como fractales, o *ruido 1/f*[14].

Para comprender mejor este tipo de comportamiento, es importante introducir en primer lugar algunas definiciones basadas en la transformación de Fourier de las series temporales y/o espaciales generadas por el sistema. Este procedimiento lleva a una descripción del sistema en un dominio de frecuencias, con una función espectral $S(\lambda)$ que asocia a cada frecuencia λ un peso espectral. En esos términos se pueden definir tres tipos de *ruidos*, dado que la forma de la función espectral muestra las correlaciones entre lo que ocurre en distintos momentos o distintos puntos del espacio:

- *ruido blanco*: $S(\lambda) \approx \lambda^0$, es decir todas las frecuencias tienen igual peso y las correlaciones espacio-temporales son irrelevantes
- *ruido browniano*: $S(\lambda) \approx \lambda^{-2}$, es decir el peso espectral cae rápidamente con la frecuencia y las correlaciones son de escala relativamente corta
- *ruido 1/f* : $S(\lambda) \approx \lambda^{-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 2$, es decir que el peso espectral cae pero no tan rápidamente y las correlaciones son de escala más larga

Un ejemplo sencillo de este tipo de comportamiento ruido 1/f puede verse en el **modelo de pila de arena**[15]. En él se representa un fenómeno "*stick-slip*", formalizable mediante una función de Heaviside. Una fuerza de grado variable es aplicada al sistema no causando efectos hasta que alcanza un grado crítico . A partir de allí se puede observar cómo el sistema resulta afectado por la fuerza en proporción a su grado.

Los modelos de pila de arena pueden ser de varios tipos. En general, consisten en un conjunto de sitios $\{s_i\}$ que pueden tomar un conjunto de valores $Z \in \{0,1,...Z_c\}$, donde Z_c es el valor crítico del parámetro Z. Una interpretación standard de Zc es que es la pendiente local, es decir, el diferencial de altura o potencial requerido para iniciar un desplazamiento. Para su formalización es posible utilizar un modelo tipo Autómata Celular (AC), que consiste en una configuración contable de sitios o células **i** en **d** dimensiones, operando en paralelo con los sitios vecinos en un radio **r**, bajo una regla local **ϕ**. En cada intervalo del tiempo cada sitio toma valores en un alfabeto finito **A**, representado por un conjunto de **k** posibles símbolos, convencionalmente numerados {0,.., k-1}. En particular , para la descripción de la pila de arena se presenta un modelo AC en el que cada sitio i tiene una variable entera $Z_i \geq 0$, y hay un umbral Z_c que puede ser al menos 2d - 1, donde d es la dimensión del espacio.

Como una primera aproximación se estudiará el modelo propuesto en una sola dimensión.
Si el sitio tiene $Z_i > Z_c$, entonces

$$Z_i \to Z_i - 2$$
$$Z_{i-1} \to Z_{i-1} + 1$$

La regla del autómata es:

$$Z_i\,(t+1) = Z_i\,(t) - 2\,\theta\,(\,Z_i\,(t) - Z_c\,) + \sum_{nn} \theta\,(\,Z_j\,(t) - Z_c\,)$$

donde θ (x) es la función Heaveside, cero para $x \leq 0$ y uno para $x > 0$. Para el caso que se está estudiando Z_i se supone la pendiente local .

Las condiciones de borde del modelo pueden asumir dos configuraciones distintas (donde L es el sitio de frontera):

I. La misma regla para todos los lugares, $Z_{L+1} = 0$
II. $Z_L \to Z_L - 1$, y $Z_{L-1} \to Z_{L-1} + 1$, para $Z_L > Z_c$

La condición I no conserva la suma de los Z_i y corresponde a una pila de arena con vallas. La condición II conserva la suma de Z_i y corresponde a una pila de arena abierta.

El sistema descripto recibe perturbaciones externas, que pueden ser principalmente de dos tipos:

I. $Z_i \to Z_i + 1$
II. $Z_i \to Z_i + 1$ y $Z_{i+1} \to Z_{i+1} - 1$

El segundo tipo de perturbación corresponde a un incremento local de la pendiente de la pila de arena que involucra reacomodamientos grandes en la pila. El primero corresponde a una adición de un grano de arena en la pila y es mucho más fácil de implementar. Si se produce una excitación continua del sistema (perturbación del tipo b), éste se asentará en una situación en la que todos los sitios estén en Z_c. Este proceso es irreversible dado que los granos de arena fluyen fuera del sistema, y nada asegura que las configuraciones preexistentes se vuelvan a alcanzar al añadir nuevos granos de arena.

En el caso de mayores dimensiones el análisis varía dado que el sistema naturalmente no evoluciona a un estado con pendiente promedio $\varphi = < z >$ de Z_c, pero sí a un estado $\varphi < Z_c$ en el que ocurren fluctuaciones críticas. El modelo en d dimensiones se define en forma análoga al de una dimensión:

$$Z_i(t+1) = Z_i(t) - 2\,d\,\theta(Z_i(t) - Z_c) + \sum_{nn} \theta(Z_j(t) - Z_c)$$

donde se suma sobre los vecinos cercanos al lugar i. Esto corresponde a un proceso suave $Z_i \rightarrow Z_i - 2d$; $Z_j \rightarrow Z_j + 1$ para $Z_i > Z_c$, que consiste en un equivalente discreto de un fenómeno de difusión, si la variable está por encima del valor umbral. Nuevamente es posible encontrar dos condiciones de borde:

I. La misma regla para todos los lugares
II. $Z_L \rightarrow Z_L - N(Z_L)$ si $Z_L < Z_c$

donde Z_L es un lugar en la frontera y $N(Z_L)$ es el número de vecinos que Z_L tiene dentro del sistema. Al igual que antes es posible aplicar varias perturbaciones al sistema, representándose el estado de un sitio después de una perturbación como:

$$Z_{ij} \rightarrow Z_{ij} + 2$$
$$Z_{i\text{-}ij} \rightarrow Z_{i\text{-}ij} - 1$$
$$Z_{ij}\text{-}1 \rightarrow Z_{ij\text{-}1} - 1$$

Se puede demostrar que cualquier perturbación que se produzca en la máxima configuración estable posible (donde todos los sitios tienen el valor crítico) puede desencadenar una secuencia de ondas capaces de hacer disminuir el valor de φ si la frontera es del tipo I. Si el sistema es expuesto a continuas perturbaciones finalmente desemboca en el valor crítico φ_c , que es *críticamente estable,* dado que una perturbación en ese estado puede desencadenar agrupamientos de cualquier tamaño.

El número n(s) de agrupamientos s por sitio, es decir, la distribución tamaño-agrupamiento del sistema tiene una ley de potencia de la forma:

$$n(s) \approx s^{-\tau}$$

Considerando que los agrupamientos varían en el tiempo es interesante conocer cuántos pasos de tiempo (instantes) T puede vivir un agrupamiento dado. La distribución del tiempo de vida de los agrupamientos sigue la ley de potencia:

$$D(T) \approx T^{-\phi}$$

Dado lo anterior es posible considerar que en cada momento diminuye el valor de Z_i en cada sitio, como una disipación de energía, y la función espectral resultante muestra un comportamiento 1/f, y se comporta como $\lambda^{\phi-2}$, donde λ es la frecuencia. Esto resulta interesante ya que algunas series de variables económicas han mostrado ser ruidos 1/f, por ejemplo las fluctuaciones en los precios del mercado bursátil, o las fluctuaciones del nivel de precios a agregado [(16)].

Si bien las especificaciones formales anteriores siguen los lineamientos de un modelo AC para la formalización de la pila de arena, existen sustanciales diferencias entre ambos. A diferencia de los modelos AC convencionales, los modelos de pila de arena no son sistemas cerrados en los cuales la regla subyacente actúa dada una configuración inicial. Los modelos de pila de arena tienen un *input constante*, aunque sus reglas puedan ser puestas en la forma de reglas AC. Los modelos de pila de arena pertenecen a los sistemas termodinámicos fuera del equilibrio y son conducidos (existe una fuerza externa) y disipativos. Padecen algunas limitaciones a la hora de aplicarlos para explicar fenómenos reales porque el conjunto de posibles interacciones está en alguna medida arbitrariamente restringido dado que los sitios están fijados, tanto en el espacio como en número. Sin embargo estos modelos son capaces de mostrar comportamiento ruido 1/f, y parece haber una considerable independencia entre la estructura resultante y la regla subyacente.

Sería interesante avanzar más allá de los modelos de pila de arena y estudiar sistemas que tienen estados internos más complejos, reglas no homogéneas, reglas adaptativas, memoria e interacciones no locales. El análisis de estos tópicos permitiría estudiar patrones y estructuras separadas de consideraciones de un modelo específico.

II.5 Conclusión

Muchos fenómenos económicos se caracterizan por ser claramente no lineales. El comportamiento de los agentes, las economías de escala, las interacciones entre países..., son ejemplos de tales fenómenos. La Teoría del Desarrollo es en sí misma la descripción y análisis de un fenómeno no lineal, y probablemente sea esta la razón por la que no se ha encarado una formalización rigurosa. La teoría del Caos, la sinergética, el estudio de los fenómenos críticamente autoorganizados, parecen proveer de las herramientas formales para encarar tal formalización.

Específicamente en el caso de la teoría del caos y sus posibles aplicaciones a la Economía, es posible ver que la existencia de acoplamientos (interdependencia entre agentes económicos) genera comportamientos complejos que pueden derivar en órbitas caóticas. Este hecho es muy importante en varios campos de la Economía: por ejemplo, el libre comercio internacional introduce acoplamientos entre distintas naciones que tienden a producir dependencia no trivial con el tiempo, posiblemente con sensibilidad a las condiciones iniciales. Teniendo dependencia temporal, tendiendo el sistema a un atractor extraño con un futuro que es prácticamente impredictible, el resultado neoclásico de que el libre comercio entre países es más ventajoso que la imposición de barreras comerciales puede dejar de ser válido total o parcialmente.

A pesar de todas las posibles ventajas señaladas acerca de la utilización de la teoría del Caos en Economía, existen fuertes dificultades para su implementación. El estudio cuantitativo del caos en un sistema requiere de una comprensión cualitativa de dicho sistema, esto es, una buena comprensión acerca de los fenómenos que lo generan. En el caso de no conocer las ecuaciones que gobiernan el sistema es posible inferir su dinámica a partir de las series temporales. Esta tarea de reconstrucción, que ya presenta *per se* algunas dificultades, no siempre es asequible al economista, puesto que generalmente no cuenta con series lo suficientemente extensas y de buena precisión.

Por otro lado, la teoría del Caos deja fuera de consideración dos aspectos fundamentales en la teoría económica: el *aprendizaje* de los agentes, que conduciría a un cambio permanente en las ecuaciones que gobiernan el sistema, y la presencia de *shocks exógenos*, que alteran el sistema como un todo. En cambio, tanto los sistemas sinergéticos como los críticamente autoorganizados permiten analizar los efectos de los shocks exógenos , por lo que en principio se presentan como más apropiados para la modelización de los fenómenos económicos. En el caso de la sinergética, el shock exógeno juega un papel preponderante a la hora de determinar el estado final de un sistema, partiendo del estado de equilibrio. Esta representación podría ser adecuada para analizar, por ejemplo, los efectos de distintas políticas macroeconómicas, o el impacto de las innovaciones en un modelo de desarrollo. Fundamentalmente, los fenómenos autoorganizados analizados por la sinergética muestran fuertes analogías con los procesos de desarrollo. El principio esclavizador podría ser utilizado como herramienta formal para la descripción de los efectos que determinan desequilibrios (modos inestables) tienen sobre un sistema económico. De hecho, la teoría del crecimiento desequilibrado de Hirshman podría ser analizada a la luz de la primacía de modos inestables sobre modos estables.

El rol de los shocks exógenos en los modelos SOC es bastante diferente del de los sistemas sinergéticos. En dichos modelos las perturbaciones no se presentan como una alteración brusca del sistema, sino que se encuentran normalmente distribuídas y son de pequeña magnitud. Por otro lado, las consecuencias del shock sobre el sistema obedecen a una ley de potencia Pareto-Levy, por lo que no se puede establecer una clara correlación entre la perturbación y sus efectos.

Si bien la incorporación a la teoría económica de los conceptos referentes a los tres sistemas analizados (caóticos, sinergéticos y críticamente autoorganizados) está en marcha, aún falta mucho camino por recorrer. Las técnicas matemáticas de la termodinámica del no equilibrio resultan poco familiares para los economistas y los modelos construidos de esta manera no se prestan, por su alta sensibilidad a la precisión de las medidas, a la verificación empírica o a la predicción. Más aún, muchos de estos modelos no admiten soluciones analíticas conocidas (un problema frecuente en los modelos dinámicos no lineales), por lo que cualquier análisis de los mismos debe ser de simulación. De esta forma, su aplicación a estudios empíricos sólo puede ser de índole heurística. Aún así, resulta interesante la aplicación de estas herramientas a la teoría económica para la descripción y análisis de aquellos fenómenos que, por su grado de complejidad, no resultaban factibles de ser modelizados mediante relaciones lineales.

III. Un modelo no lineal de desarrollo

La representación formal de los distintos enfoques de desarrollo no es una tarea sencilla. Tales enfoques describen relaciones y comportamientos complejos que difícilmente puedan ser representados con ecuaciones diferenciales o en diferencias ordinarias. Los parámetros que cambian mientras el sistema evoluciona, el impacto de los shocks exógenos ante las distintas configuraciones de los sistemas, etc, constituyen claros ejemplos de comportamiento complejo. Las innovaciones schumpeterianas, así como la teoría del crecimiento desequilibrado de Hirschman representan hitos fundamentales en la historia del pensamiento en desarrollo económico y un programa de investigación que intente formalizarlos difícilmente logre un modelo representativo utilizando relaciones lineales.

Se han presentado, en el apartado anterior, herramientas formales alternativas al análisis lineal, con el fin esbozar, preliminarmente, un modelo de desarrollo sencillo. Una de esas herramientas se encuentra analizada bajo la Teoría del Caos. Como se vio, series temporales que presentan un comportamiento aparentemente aleatorio, pueden ser explicadas mediante ecuaciones sencillas deterministas, como por ejemplo la ecuación logística. Si bien el estudio del caos puede ser de suma utilidad para la interpretación de fenómenos económicos, se debería considerar que en el caso de los modelos de desarrollo el aspecto más sobresaliente es el cambio estructural involucrado. Por lo tanto, un sistema de ecuaciones con parámetros invariantes en el tiempo no parece ser lo más apropiado para tal representación. Por otro lado, tanto los sistemas sinergéticos como los SOC tienen la propiedad de variar sus parámetros cuando el sistema pasa de un estado metaestable a otro. De allí que la elección de la herramienta formal se incline hacia estos sistemas. El modelo que se propone más adelante sigue los lineamientos formales de un sistema autoorganizado abierto, tipo autómata celular. En particular este modelo se comporta como un autómata celular que a partir de un estado inicial y una perturbación al mismo, evoluciona hasta alcanzar un nuevo estado (que puede ser perturbado posteriormente). La autoorganización aparece en el nuevo estado estable que el sistema alcanza después de la transición, posterior a la perturbación.

III.1 El modelo: conceptos

Siguiendo las definiciones de Olivera (1956), definimos al grado de desarrollo de un sistema, y su tasa de variación, como:

$$\alpha Pp = Pa$$
$$D\log\alpha + D\log Pp = D\log Pa$$

donde:

α : grado de desarrollo
Pp : producto potencial
Pa : producto real

Suponemos que en los países en desarrollo la expansión de la tasa de crecimiento dada por DlogPp depende del crecimiento de los factores primarios y del progreso técnico neutral de Harrod. La tasa de desarrollo $D\log\alpha$ depende de la acumulación del capital y de las condiciones que permiten (o limitan) que este proceso de acumulación tenga lugar: existencia de mano de obra calificada, dirección empresarial, marco institucional, etc. Intervienen también en la determinación de Dlogα el diferente grado de aprovechamiento de los factores disponibles para la producción entre los distintos sectores de la economía.

Partiendo de un producto potencial dado por la plena utilización de aquellos recursos en donde la economía se encuentra mejor dotada (mano de obra y recursos naturales) podemos entonces considerar, *ceteris paribus*, que DlogPp es igual a la tasa de crecimiento de la población (que es el recurso económico más abundante) más la tasa de progreso técnico. Ambas tasas se toman constantes y exógenas. Esta es una simplificación extrema, sobre todo teniendo en cuenta que el progreso técnico puede depender de las condiciones mismas del modelo, es decir que sea endógeno. Además, el crecimiento de la población económicamente activa puede sufrir fluctuaciones en el transcurso del proceso de desarrollo.

Se plantea un sistema dinámico-histórico, en el sentido que pueden establecerse relaciones funcionales entre variables en diferentes puntos del tiempo, que resulta ser una variable independiente.

III.2 Especificación del modelo

Consideremos un reticulado completamente conexo, cuyos nodos serán llamados sectores. Cada sector tendrá asociadas las siguientes variables:

- Producto potencial: el máximo producto que puede ser obtenido con los recursos con los cuales el sector está mejor dotado
- Grado de desarrollo (al que se le asigna un valor inicial)
- Producto real: obtenido a partir de la demanda de la producción del sector

Existen economías externas que provocan el incremento en la producción de otros sectores en respuesta al incremento en el producto real - y por ende del grado de desarrollo- de sectores asociados. Tales economías pueden darse por condiciones técnicas, variaciones en las condiciones macroeconómicas en respuesta a necesidades de ciertos sectores de gran influencia (reformas jurídicas, laborales, previsionales, etc.), o por efecto de las expectativas de los agentes económicos. Se consideran los efectos reales de los cambios producidos, quedando fuera de este primer análisis los aspectos monetarios. Se supone la existencia de efectos multiplicadores intrasectoriales, es decir la influencia de la producción de un sector sobre el crecimiento futuro del mismo sector. Por otra parte, suponiendo que el Producto Potencial de cada sector crece a una tasa æ, resultaría que el grado de desarrollo α (que toma valores en el intervalo unitario) crece a la tasa:

$$\mathrm{Dlog}\alpha = \mathrm{DlogPa} - æ$$

Los planes de producción de cada sector i responden a las demanda de los productos del sector, con un retraso de tipo Lundberg:

$$Pa_i^t = F_i\,(D_i^{t-1})$$

Las variaciones en la demanda del sector i vienen dadas por las variaciones en la producción de los demás sectores j, ponderadas por las necesidades de productos de i en la producción de los j (k_{ij}) más un componente H_i^t que indica variaciones exógenas en la demanda (cambios de expectativas, modificaciones en los patrones de consumo o inversión, políticas fiscales, etc.):

$$D_i^t - D_i^{t-1} = \sum k_{ij}*(Pa_j^t - Pa_j^{t-1}) + H_i^t$$

La función F_i tiene en este modelo la siguiente caracterización:

$$f(x) \begin{cases} Pp\,, & \text{si } x > Pp/\varepsilon \\ \varepsilon x\,, & \text{si } x \in [\delta.Pp/\varepsilon,\ Pp\varepsilon] \\ \beta \mathrm{sen} x + \tau, & \text{si no} \end{cases}$$

Esto significa que la reacción de la demanda de un sector a las demandas y ofertas de los demás sectores oscila si los valores de dichas variables no superan, en conjunto, un cierto umbral. Pasado el mismo la reacción es positiva hasta llegar al valor máximo posible. Esta función de respuesta puede basarse en un comportamiento de minimización de costos de cada sector para el cual la cantidad demandada en el período anterior es una cota superior. Para que tenga esta forma funcional es suficiente considerar la existencia de no convexidades para cantidades relativamente bajas, y monotonicidades para valores más altos.

III.3 Comportamiento del sistema

Una vez dada la especificación del modelo se hace necesario determinar las trayectorias posibles de la variable grado de desarrollo. Sin embargo, tratándose de una representación en una familia interrelacionada de ecuaciones en diferencia (parciales) no resulta posible hallar soluciones analíticas.

En estos casos, conviene simular el modelo, dando valores a los parámetros del mismo y obtener, mediante una simple integración numérica, a partir de condiciones iniciales alternativas, las trayectorias buscadas. En este modelo de desarrollo los parámetros son n (el número de sectores),æ,α, β, ε, τ, y la matriz de coeficientes $\sum k_{ij}$, mientras que las condiciones iniciales son los Pp_i^0, Da_i^{-2}, Pp_i^{-2}, Pp_i^{-1} y H_i^{-1}. Con dichos datos se puede seguir la evolución de las variables α_i^t para t = 0 hasta t = T.

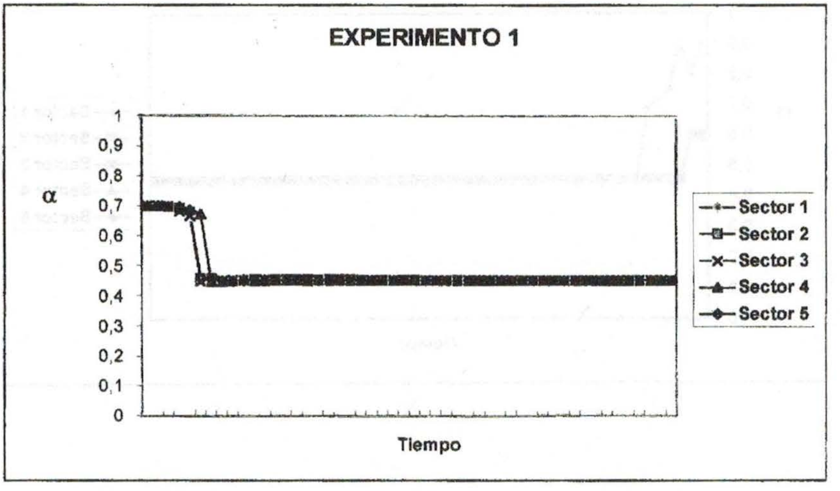
Para acotar el número de simulaciones a efectuar, se fijan los valores de algunos parámetros:

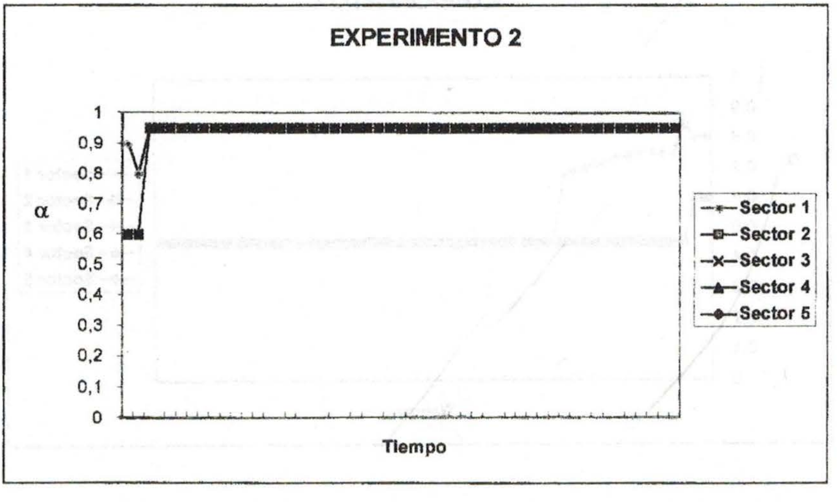
n = 5
æ = 0.05
β = aleatorio entre [0,1]
δ = 0.7
$\tau = 0.5 * \max\{Ppi\}$
$\sum k_{ij}$ = matriz normalizada por filas y columnas de números aleatorios entre [0,1]

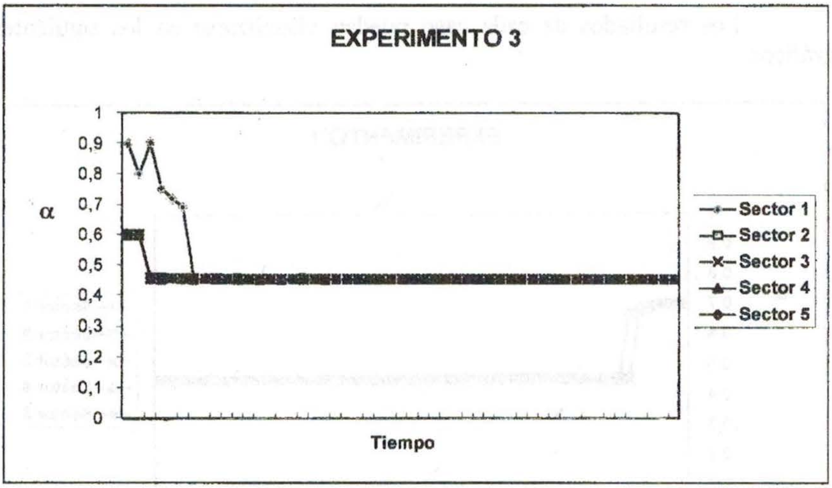
Se han efectuado, con estas restricciones, los siguientes experimentos numéricos, que representan, cada uno de ellos, a una familia de comportamientos análogos (ver gráficos):

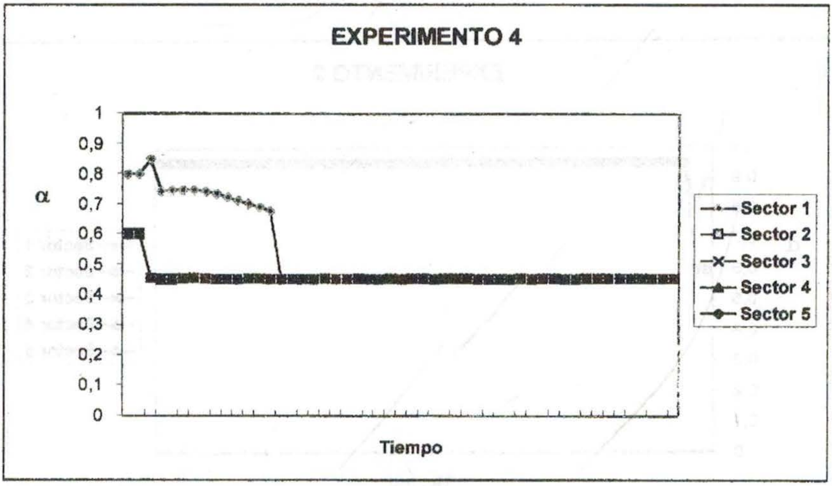
CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5	CASO 6	CASO 7
Para i=1..5	**Para i=2..5**	**Para i=2..5**	**Para i=2..5**	**Para y=2..5**	**Para i=1..5**	**Para i=2..5**
$\alpha_i^{-1} = \alpha_i^{-2} = 0.7$	$\alpha_i^{-1} = \alpha_i$-2 = 0.6	$\alpha_i^{-1} = \alpha_i$-2 = 0.6	$\alpha_i^{-1} = \alpha_i^{-2} = 0.6$	$\alpha_i^{-1} = \alpha_i$-2 = 0.6	$\alpha_i^{-1} = \alpha_i$-2 = 0.8	$\alpha_i^{-1} = \alpha_i$-2 = 0.6
$D_i^{-2} = 70$	$D_i^{-2} = 60$	$D_i^{-2} = 60$	$D_i^{-2} = 60$	$D_i^{-2} = 60$	$D_i^{-2} = 80$	$D_i^{-2} = 60$
$Pp_i^{-2} = 100$	$Pp_i^{-2} = 100$	$Pp_i^{-2} = 100$	$Pp_i^{-2} = 100$	$Pp_i^{-2} = 100$	$Pp_i^{-2} = 100$	$Pp_i^{-2} = 100$
$H_i^{-1} = 0$	$H_i^{-1} = 0.5$	$H_i^{-1} = 0.5$	$H_i^{-1} = 5$	$H_i^{-1} = 5$	$H_i^{-1} = 1$	$H_i^{-1} = 10$
$\varepsilon = 1.1$	$\varepsilon = 2.5$	$\varepsilon = 1.1$	$\varepsilon = 1.1$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 1.5$	$\varepsilon = 1.1$
	y	y	y	y		y
	$\alpha_1^{-2} = 0.9$	$\alpha_1^{-2} = 0.9$	$\alpha_1^{-2} = 0.8$	$\alpha_1^{-2} = 0.8$		$\alpha_1^{-2} = 0.8$
	$\alpha_1^{-1} = 0.8$	$\alpha_1^{-1} = 0.8$	$\alpha_1^{-1} = 0.8$	$\alpha_1^{-1} = 0.8$		$\alpha_1^{-1} = 0.8$
	$D_1^{-2} = 90$	$D_1^{-2} = 90$	$D_1^{-2} = 80$	$D_1^{-2} = 80$		$D_1^{-2} = 80$

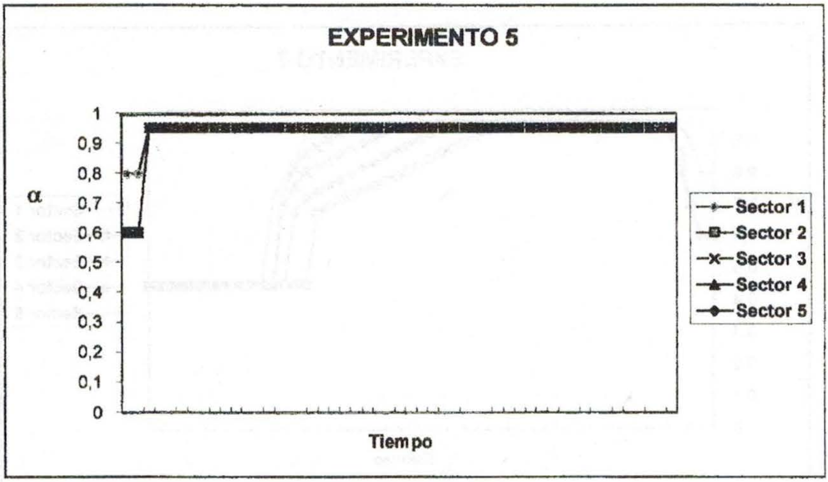
Los resultados de cada caso pueden visualizarse en los siguientes gráficos:

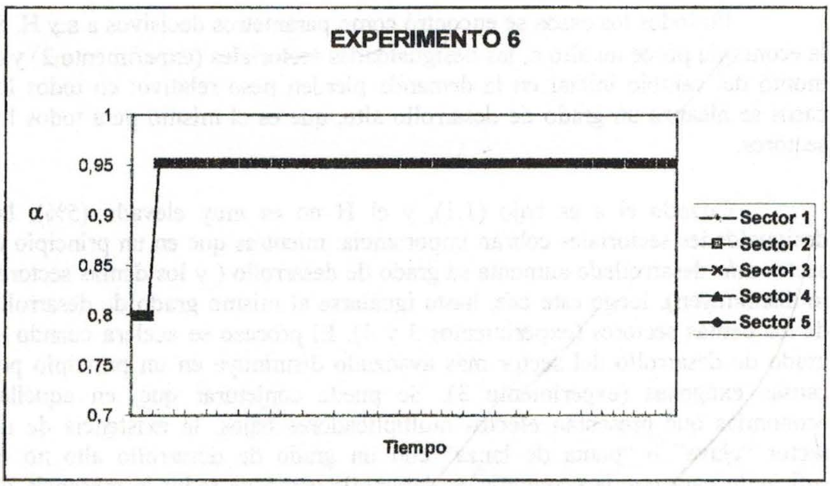


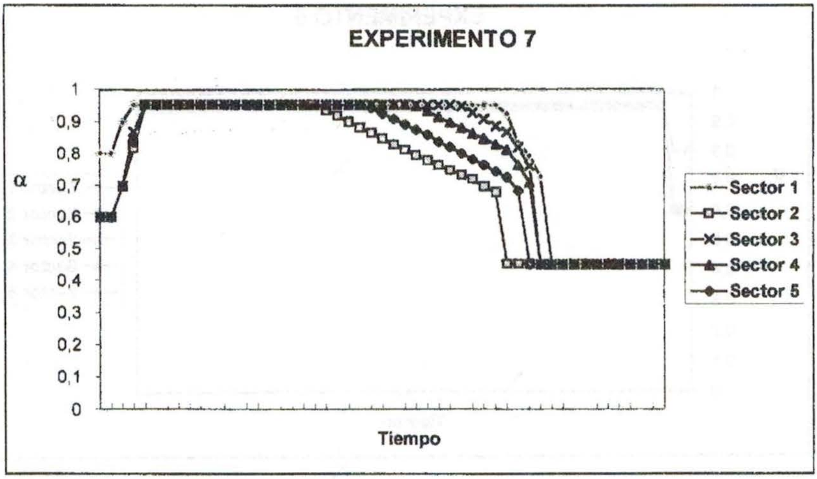



EXPERIMENTO 3
1
0,9
0,8
α
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Tiempo
Sector 1
Sector 2
Sector 3
Sector 4
Sector 5


EXPERIMENTO 4
1
0,9
0,8
α
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Tiempo
Sector 1
Sector 2
Sector 3
Sector 4
Sector 5


EXPERIMENTO 5
1
0,9
0,8
α
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Tiempo
Sector 1
Sector 2
Sector 3
Sector 4
Sector 5


EXPERIMENTO 6
1
0,95
α
0,9
0,85
0,8
0,75
0,7
Tiempo
Sector 1
Sector 2
Sector 3
Sector 4
Sector 5



III. 4 Análisis de los resultados

En todos los casos se encontró como parámetros decisivos a ε y H. Si la economía posee un alto ε, las desigualdades sectoriales (experimento 2) y el monto del cambio inicial en la demanda pierden peso relativo: en todos los casos se alcanza un grado de desarrollo alto, que es el mismo para todos los sectores.

Cuando el ε es bajo (1.1), y el H no es muy elevado (5%), las desigualdades sectoriales cobran importancia: mientras que en un principio el sector más desarrollado aumenta su grado de desarrollo (y los demás sectores lo disminuyen), luego este cae, hasta igualarse al mismo grado de desarrollo de los demás sectores (experimentos 3 y 4). El proceso se acelera cuando el grado de desarrollo del sector más avanzado disminuye en un principio por causas exógenas (experimento 3). Se puede conjeturar que, en aquellas economías que presentan efectos multiplicadores bajos, la existencia de un sector "clave" o "punta de lanza" con un grado de desarrollo alto no es suficiente para que la economía se desarrolle como un todo: la presencia de sectores con baja utilización de sus potencialidades no sólo hace retrasar al sector inicialmente más avanzado, sino que la caída del desarrollo en dicho sector arrastra al resto de la economía; como consecuencia, el sistema queda oscilando en un grado de desarrollo mucho menor al inicial. Los efectos de retardo predominan.

Los resultados se modifican sensiblemente cuando se considera un impulso inicial de demanda que duplica al de los casos anteriores (10%). El experimento 7 muestra que la economía llega en un principio a un grado de desarrollo relativamente alto en conjunto, pero conservando disparidades sectoriales. Luego, estas comienzan a acentuarse y el sistema declina suavemente en su crecimiento. Los sectores menos desarrollados inicialmente son los primeros en caer, seguidos por el sector inicialmente más avanzado. Se podría argumentar que un desequilibrio inicial en el sistema (incremento en H) no es suficiente para que el mismo se estabilice en un alto grado de desarrollo, sino que se harían necesarios nuevos impulsos de demanda para mantener el grado de desarrollo alcanzado. Estos resultados se asemejan en cierta forma a la hipótesis del crecimiento desequilibrado, donde la existencia de desequilibrios se presenta como condición para el avance de la economía [17].

Aún partiendo de todos los sectores con un grado de desarrollo similar (70%, en el experimento 1), el comportamiento dinámico de la economía se asemeja al anterior en sus resultados finales: si bien en un principio el grado de desarrollo aumenta, luego cae hasta oscilar en valores mucho más bajos que los iniciales. En todos estos casos (1, 3 y 4), la presencia de un multiplicador bajo y la ausencia de impulsos de demanda (caso 1) o con impulsos de demanda bajos (casos 3 y 4) hacen que la economía, por su propio funcionamiento, disminuya en su grado de desarrollo. Los cuellos de botella planteados en el sistema no se solucionan por sí mismos, sino que perduran y se acentúan en el tiempo.

La importancia explicativa del ε disminuye cuando el sistema parte de sectores igualmente desarrollados, en un grado relativamente alto (0.8). En este caso, un pequeño impulso de demanda parecería ser suficiente para que el grado de utilización de los recursos se incremente (experimento 6). Esta conclusión es compatible con la hipótesis del crecimiento equilibrado presentada por Leibenstein: una vez que la economía traspone cierto umbral crítico, su desarrollo prácticamente está asegurado. A su vez, esta conclusión también está de acuerdo con la crítica de Hirschman a la hipótesis de crecimiento equilibrado: tal estrategia de crecimiento sólo es factible de ser aplicada en economías que ya se encuentran desarrolladas.

La representación formal del proceso de desarrollo presentada en este trabajo no es la única posible. Sin embargo puede suponerse que todo modelo en el que las relaciones intersectoriales (o interregionales) se tomen en cuenta tendrá características similares al desarrollado en secciones anteriores.

Fundamentalmente se señala que la no linealidad de las relaciones parece ser una propiedad de la que no es posible dispensar a ninguna teoría formalizada del desarrollo económico. Por otra parte, la complejidad de la red de relaciones a considerar hace difícil un tratamiento analítico que no recurra a la experimentación numérica. Dadas estas restricciones el modelo presentado resulta útil como representación de ciertos procesos de desarrollo.

La principal conclusión que se desprende de los resultados obtenidos es que, con efectos multiplicadores bajos, sólo un impulso fuerte de demanda puede provocar un aumento en el grado de desarrollo si la economía se encuentra en el umbral crítico del desarrollo (70%). Si hay sectores debajo de ese umbral el impulso de demanda no se mantiene, dado que no se modifica la estructura del sistema.

Se ve, por otra parte, que existen dos atractores en el sistema, uno de grado de desarrollo bajo y otro de desarrollo alto, no siendo ni el mínimo ni el máximo factible. Dado este hecho, los desequilibrios nunca son permanentes, terminando todos los sectores con un grado de desarrollo homogéneo.

Es indudable, y esto es tema de desarrollos posteriores, que se puede introducir progresivamente mayor complejidad al modelo de manera de explicar nuevos hechos del desarrollo.

IV. Conclusiones

En la introducción de este trabajo se ha puesto de manifiesto la pérdida de respetabilidad científica de la Teoría del Desarrollo, y se ha presentado como hipótesis que ésto obedeció en parte a la falta de claridad en sus presentaciones teóricas. Este problema parecería ser consecuencia, en parte, de una de sus características fundamentales: la falta de representaciones formales de las estrategias de desarrollo presentadas.

En vista a lo anterior, y dado que los conceptos y estrategias de desarrollo presentados continúan siendo citados y estudiados (en muchos casos, en el área del crecimiento económico), se ha planteado la *posibilidad* de un nuevo enfoque metodológico: la representación formal de la Alta Teoría del Desarrollo mediante las herramientas matemáticas provenientes del análisis no lineal. Básicamente el objetivo es el de retomar la discusión conceptual, y avanzar en ella dadas las necesidades y restricciones de las economías en desarrollo actuales [18]. En un breve sumario acerca de los avances en el análisis no lineal se estudió la factibilidad de modelizar estados de desequilibrio, conflicto, inestabilidad, caos, cambio estructural, etc, situaciones propias de los procesos de desarrollo.

Estas herramientas formales permitirían que la Teoría del Desarrollo avance en el grado de formalización análogamente a lo ocurrido en la Teoría del Crecimiento. Por otro lado, se abriría una línea de investigación para la comprensión de fenómenos puntuales que afectan el grado de desarrollo: el impacto de las innovaciones sobre la estructura productiva de una economía, el efecto de la creación de mercados comunes sobre el grado de desarrollo de las economías en particular, las consecuencias de cambios de los regímenes políticos sobre el desempeño de un sistema, etc. Todos estos procesos tienen como característica común que el resultado depende de los parámetros de los modelos considerados, en un sistema donde a su vez los parámetros varían conforme a la perturbación producida. La sinergética y los sistemas SOC son herramientas útiles para la representación de estos fenómenos.

A pesar de lo anterior, la variedad de herramientas presentada no muestra la preeminencia de ninguna de ellas para abarcar totalmente el problema del desarrollo. Más bien podría decirse que para **cada** aspecto del desarrollo hay un modelo formal capaz de representarlo adecuadamente, pero no hay ningún modelo que represente **todos** los aspectos relevantes. Una explicación rápida de este fenómeno podría atribuirse a la inexistencia de un concepto unificado de desarrollo, pero lo más probable es que el verdadero origen de esta situación se encuentre en la todavía poco desarrollada Teoría de los Sistemas Complejos.

Es importante destacar que la ventaja principal de la representación formal de una teoría es que permite una inambigua interpretación de la misma, dada la explicitud y claridad de sus premisas. De esta forma es posible alcanzar el objetivo propuesto, esto es, continuar y ampliar la línea de investigación avanzando en el poder explicativo de los modelos. Cabe señalar que **no es la formalización de la teoría la que eleva su status científico, sino las ideas y conceptos que dicha teoría expone**. El instrumento matemático es útil para el análisis de estos conceptos, para su representación, como también para su refutación. En tal sentido, el análisis no lineal presentado permite una aproximación formal a las ideas principales de la teoría del desarrollo que anteriormente se exponían de manera discursiva, de forma tal que puedan ser sometidas al riguroso análisis de partidarios y detractores de dicha teoría.

Para avanzar en esta dirección, se presentó un sencillo modelo no lineal de desarrollo mediante el cual se pudieron analizar algunas de las conclusiones de distintas estrategias de desarrollo. El ejercicio propuesto intenta alejarse del determinismo de los sistemas caóticos, y de las restricciones impuestas por los sistemas críticamente autoorganizados. Por ello, se optó por un modelo de difusión abierto tipo autómata celular, que se aproxima en su concepción formal a un sistema autoorganizado. Dada la inexistencia de solución analítica, ha sido necesario realizar ejercicios de simulación bajo distintos escenarios.

El modelo presentado deja algunos interrogantes sin responder : cómo incorporar al análisis la *interrelación* entre el grado de desarrollo y el producto potencial? En este contexto, ¿es posible analizar la evolución económica independientemente del grado de desarrollo de un país? Y fundamentalmente: ¿cómo se relaciona el comportamiento aparentemente errático de las principales variables macroeconómicas (desempleo, tasa de inflación, agregados monetarios) con los distintos conceptos de desarrollo y evolución? ¿Es legítimo hablar de evolución sin considerar el desempeño de una economía frente al de otras ? El sencillo modelo propuesto no puede dar respuesta a estos interrogantes. El análisis macroeconómico estándar debería poder realizarse bajo este nuevo esquema metodológico. De allí entonces que el trabajo futuro propuesto sea el de analizar en la literatura actual los avances que se han producido en esta dirección, a la vez que se profundice en las propiedades y posibilidades que ofrecen los nuevos instrumentos matemáticos presentados, para continuar en este intento de representar, lo más fielmente posible a sus presentaciones originales, el núcleo central de la Teoría del Desarrollo.

Silvia London
Departamento de Economía
Universidad Nacional del Sur

REFERENCIAS

1. Lewis, W.A.: *The State of Development Theory*, American Economic Review, vol 74, Nº 1, marzo 1984.
2. Hirschman, A.: *De la Economía y la Política y Más Allá*, Fdo. de Cultura Económico, México, 1984.

3. Muchos de los conceptos de desarrollo han sido tomados actualmente por la Nueva Teoría del Crecimiento Endógeno. Ver Amable, B. y Guellec, D.: *Les Théories de la Croissence Endogène*, Revue d'Economie Politique 102 (3), 1992.

4. Krugman, P.: *Toward a Counter-counterrevolution in Development Theory*, Proceedings of the World Bank Annual Conference on Development Economics, 1992

5. Allais, M.: *Posibilidades y Peligros de la Utilización del Método Matemático en Economía*, en C.Dagúm: Metodología y Crítica Económica , Fondo de Cultura Económica, México 1978.

6. Guckenheimer,J. Holmes,P.: *Non-linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields Springer*, Berlín 1983.

7. Schumpeter, A.J.: *La Teoría del Desenvolvimiento Económico*, Fondo De Cultura Económico, México 1967.

8. Para un analisis de puntos fijos más profundo ver: Day R.H.: *Complex Economic Dynamics*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1994.

9. Esta conclusión es excesivamente fuerte para ciertos problemas del análisis económico: por ejemplo, la tasa de desempleo no puede variar en todo el intervalo [0 1], ya que equivaldría a una tasa de desempleo de [0 100%], en el caso de suponer que la tasa de desempleo siguiera una dinámica caótica.

10. La teoría completa del láser ha sido desarrollada rigurosamente a partir de los primeros principios de la física, y permite dar a las nociones centrales de parámetros de orden y modos esclavizados una definición matemática concreta.

11. Para un análisis más detallado ver: Friedrich, R., Haken, H.: *A short course on synergetics*, en Proto,A. ed.: Nonlinear Phenomena in Complex Systems, North-Holland, Amsterdam 1989.

12. Per Bak y Kan Chen: *Aggregate Fluctuations From Indepenent Sectoral Shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics*, Richerche Economiche 47, 1993.

13. La escala espacio-temporal en la cual se puede describir adecuadamente el comportamiento del sistema. Los estados del sistema en un entorno del tamaño de la escala característica están correlacionados.

14. Voss, R: *Fractals in Nature: from Characterization to Simulation*, en The Science of Fractals Images, Peitgen H, Saupe D, eds. Springer-Velag, NY, 1988.

15. En él se introducen no-linealidades en un modelo computacional discreto de difusión, y es debido a Back et all (op.cit)

16. Ejemplos de ruido 1/f en series temporales se pueden ver en: Arthur, B. A.: *Positive Feedbacks in the Economy*, Scientific American, feb 1990, y en Tohmé, F., London, S. y Dabús, C.: *La inflación como un fenómeno*

críticamente autoorganizado: el caso argentino, en cuadernos de los ciclos de seminarios internos de la Universidad de San Andrés, 23/94.
17. Hirschman, op.cit. El objetivo señalado es el que Krugman definió como la Contra-contrarrevolución de la teoría del desarrollo.

BIBLIOGRAFIA

Abraham-Frois, G. y Berrebi, E., *Introduction à la dynamique chaotique*, Revue d'economie politique, 2/3 marzo-junio 1994.

Allais, M., *Posibilidades y Peligros de la Utilización del Método Matemático en Economía,* en C.Dagúm: Metodología y Crítica Económica , Fondo de Cultura Económica, México, 1978.

Allen, P.M., *Evolution, Innovation and Economics*, en Dosi, G., Freeman C., Nelson, R., Silverg, G. y Soete, L. eds., Technical Change and Economic Theory, Pinter Londres, 1988.

Amable, B. y Guellec, D., *Les Théories de la Croissence Endogène*, Revue d'Economie Politique 102, (3), 1992.

Arndt, H., *Economic Development, A Semantic History,* Economic Development and Cultural Change, Vol. 29, N° 3 ,1981.

Arrow, K. y Hahn, F., *General Competitive Analysis,* North-Holland, Amsterdam, 1971.

Arthur, B., *Self-Reinforcing Mechanisms in Economics* en Anderson,P., Arrow,K. y Pines,D. eds. The Economy as an Evolving Complex System Addison-Wesley, Redwood, 1988.

Baumol, W.J., *Los Modelos Económicos y las Matemáticas* en C.Dagúm: Metodología y Crítica Económica , Fondo de Cultura Económica, México, 1978.

Becker, V.A., *Hacia una Teoría del No Equilibrio?*, Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, Sgo. del Estero, 1991.

Boldrin, M., *Persistent Oscillations and Chaos in Dynamic Economic Models: Notes for a Survey,* en The Economy as an Evolving Complex System, Anderson, P.W., Arrow, K.J. y Pines D. editores, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

Bunge, M., *Ciencia y Desarrollo*, Ed.Siglo Veinte, Buenos Aires, 1982.

Day, R.H., *Complex Economic Dynamics*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1994.

Fernandez Díaz, A., *Economía Dinámica Caótica*, Ed. Mc Graw-Hill, Madrid, 1994.

Friedrich, R., Haken H., *A short course on synergetics*, en Proto,A., ed. Nonlinear Phenomena in Complex Systems, Amsterdam, North-Holland, 1989.

Flamann, G.R., *Economic Growth and Economic Development: counterparts or competitors?* , Economic Development and Cultural Change, vol 28 Nº 1, 1979.

Gleick, J., *Caos*, Ed. Seix Barral, España 1988.

Grossman, G.M. y Helpman, E., *Endogenous Innovation in the Theory of Growth*, Journal of Economic Perspectives 1, 1994.

Guckenheimer, J. Holmes, P., *Non-linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields Springer*, Berlín 1983.

Haken H., *Fórmulas del Exito en la Naturaleza Salvat*, Barcelona 1986.

-----------,*Information and Selforganization Springer*, Berlín 1988.

Helmer, O. y Rescher, N., *On the Epistemology of the Inexact Sciences.* Management Sciences, mayo 1959.

Herrmann, H., *Cellular Automata*, en Proto,A. ed.: Nonlinear Phenomena in Complex Systems, North-Holland, Amsterdam 1989

Higgins, B., *Economic Development. Principles Problems and Policies*, WW Norton, New York 1959.

Hirschman, A., *La Estrategia del Desarrollo Económico*, Fondo de Cultura Económico, México 1961.

Howard, P., *Endogenous Grouwth Theory: Intellectual Appeal and Empirical Shortcomings*, Journal of Economic Perspectives 1, 1994.

Kelsey, D. , *The Economics of Chaos,* Oxford Economic Papers 40(1) 1988.

Kirman, A., *Organisation et Communication dans les Marchés,* Economie Appliquée 38(3/4) 1985.

Krugman, P., *Towar a Counter-counterrevolution in Development, Theory,* Proceedings of the World Bank Annual Conference on Development Economics, 1992.

Lesourne, J. ed., *La Science Economique et l'Auto-Organisation*, número monográfico de Economie Appliquée 38(3/4) 1985.

Lewis, W.A., *The State of Development Theory*, American Economic Review, vol 74, Nº 1, marzo 1984.

London, S., *La Teoría del Desarrollo Económico como un Programa de Investigación Científica: su Formalización,* inédito, setiembre 1993.

London, S. Tohmé, F., *Un Modelo No Lineal de Desarrollo Económico,* Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, Tucumán 1993.

Lucas, R.E., *On The Mechanics of Economic Development*, Journal of Monetary Economics, julio 1988.

Nagel, E., *The Structure of Science* ,Routledge, Londres, 1961

Nurske, R., *Some International Aspects of the Problem of Economic Development*, American Economic Review, mayo 1952, reimpreso en La Economía del Subdesarrollo, Agarwala A. y Singh S, Ed.Tecnos 1963.

Olivera, J.H., *Crecimiento, Desarrollo, Progreso, Evolución: nota sobre relaciones entre conceptos,* El Trimestre Económico, junio 1959.

---------, *Economía Clásica Actual*, Ed. Macchi, Buenos Aires, 1977.

Packard, N.H., *Dynamics of Development: A Simple Model for Dynamics away from Attractors*, The Economy as an Evolving Complex System, Anderson, P.W., Arrow, K.J. y Pines, D. editores, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

Romer, P.M., *The Origins of Endogenous Growth,* Journal of Economics Perspectives 1, 1994.

Ruelle, D.,*Can Non Linear Dynamics Help Economist?,* The Economy as an Evolving Complex System, Anderson P.W., Arrow, K.J. y Pines, D. editores, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

---------, *Azar y Caos* , Ed. Alianza, Madrid 1993.

Scheinkman, J.A., *Nonlinearities in Economics Dynamics,* The Economic Journal 100, 1990.

Schumpeter, A.J., *La Teoría del Desenvolvimiento Económico*, Fondo de Cultura Económico, México 1967.

Waldrop, M.M., *Complexity*, Penguin Books, Inglaterra, 1992.